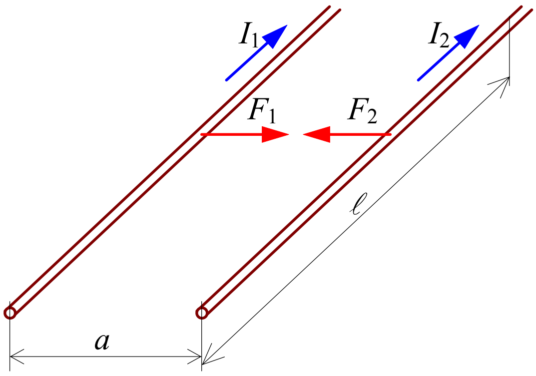
# IV. A mágneses tér alapfogalmai, alaptörvényei, mágneses körök

A nyugvó villamos töltések közötti erőhatásokat a villamos tér közvetíti (Coulomb törvénye).
A mozgó töltések (villamos áramot vivő vezetők) között is fellép erőhatás, amit a mágneses tér közvetít.
Egyenletesen mozgó töltések (egyenáram) hatására állandó, változó sebességgel mozgó (gyorsuló vagy lassuló) töltések hatására változó mágneses tér keletkezik.
A mágneses tér mozgás, változás esetén fizikai erőhatást fejt ki a töltésekre, ami töltésszétválasztó (feszültséget indukáló) hatással jár.

**A mágneses tér**
Ha vákuumban (vagy levegőben) elhelyezkedő, a keresztmetszetükhöz képest hosszú párhuzamos vezetőkben a töltések egyenletes sebességgel áramlanak (egyenáram folyik), akkor a vezetők között állandó nagyságú erőhatás lép fel. Ennek az erőnek a nagyságát az áramokkal kifejezett erőtörvény írja le, amely szerint levegőben, $F_1=F_2=F$ jelöléssel

$$F = k\frac{I_1 I_2 \ell}{a} \text{ (N)},$$

ahol $I_1$ és $I_2$ – a két vezető árama, $a$ – a vezetők egymástól mért távolsága, $\ell$ – a vezetők vizsgált szakaszának hossza.




*Áramjárta vezetőkre ható erők*

Ha $I_1=I_2=1$ A és $\ell=a=1$ m, akkor $F = 2\cdot 10^{-7}\,\text{N}\left(=\frac{\text{VAs}}{\text{m}}\right)$,

ebből következően $k = 2\cdot 10^{-7}\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$, átalakítással: $k = \frac{4\pi 10^{-7}}{2\pi} = \frac{\mu_0}{2\pi}$ itt $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ a vákuum permeabilitása. Ezt az összefüggést az 1 A nagyságú áram definiálására is alkalmazzák.
Az erő nagysága a $\mu_0$ permeabilitást tartalmazó kifejezéssel felírva:

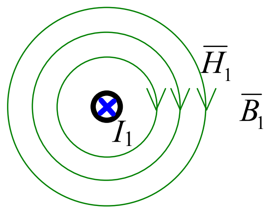
$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 \ell}{a} \text{ (N)}.$$

A vezetők között fellépő erő azonos áramirány mellett vonzó, ellenkező áramok esetén taszító irányú.
Egyenáramokat feltételezzünk, így a mágneses tér jellemzőinek értelmezése egyszerűbb.

Az ábrán $I_2$ áramot vivő vezetőre ható $F_2$ erő fellépését úgy is értelmezhetjük, hogy az $I_1$ áram egyenletes sebességgel áramló töltései a vezető körül a tér különleges állapotát hozzák létre és ez az állapot – a mágneses tér – hat az $I_2$ áramot vivő vezető egyenletes sebességgel áramló töltéseire.
A mágneses tér egyik jellemzője a mágneses térerősség. Homogén közegben az $I_1$ áram által létrehozott mágneses térerősség független a teret kitöltő anyagtól.

$H_1 = \dfrac{I_1}{2\pi a}$, amivel az $I_2$ áramot vivő vezető $\ell$ hosszúságú szakaszára ható $F_2$ erő:

$$F_2 = H_1 \mu_0 I_2 \ell .$$

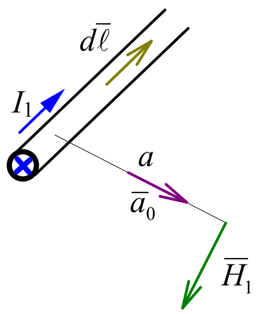



*Áramjárta egyenes vezető mágneses tere*

Egy $I_1$ áramot vivő vezetőtől $a$ távolságra a $H_1$ mágneses térerősség vektoros alakja:

$$\overline{H}_1 = \frac{I_1}{2\pi a} d\overline{\ell} \times \overline{a}_0 ,$$

ahol $\overline{a}_0$ – a vezetőtől a tér vizsgált pontjának irányába mutató egységvektor, $d\overline{\ell}$ – a vezetőben folyó áram irányába mutató egységvektor.



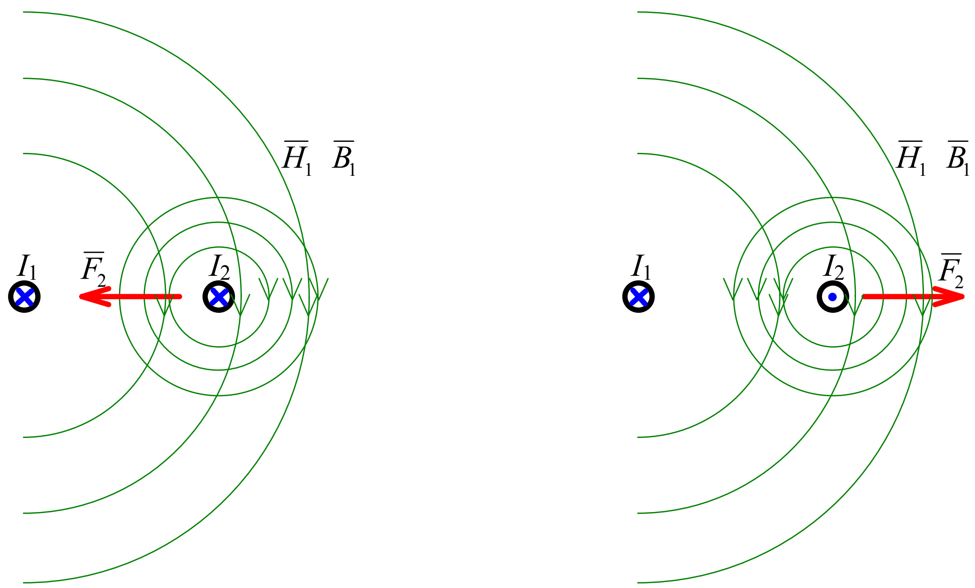

*A mágneses térerősség vektor képzése*

A továbbiakban egyszerűsítő jelölésként az skalár mennyiség áramot olyan vektornak tekintjük, amelynek iránya az áram iránya a vezetőben, nagysága pedig az áram értéke: $\overline{I}_1 = I_1 d\overline{\ell}$ .

Inhomogén és ferromágneses közegben a $H$ térerősség számítása bonyolultabb, a gerjesztési törvény szerint kell eljárni.
A $H$ térerősség vektormennyiség, iránya a tér minden pontjában megegyezik a mágnestű északi (É) irányával, ami egyetlen vezető esetén az áram irányában haladó jobbmenetű csavar forgásiránya. A mágneses térerősség SI mértékegysége

$$[H] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} .$$

A térerősséget erővonalakkal ábrázolják, ezek a tér minden pontjában a térerősség irányába mutatnak. A mágneses térerősség erővonalai önmagukban záródnak, nem keletkeznek és nem végződnek.




*Áramjárta vezetőre ható erő egy másik vezető térben*

Egy $H$ erősségű mágneses térbe helyezett, $I$ áramot vivő $\ell$ hosszúságú vezetőre ható erő: $\overline{F} = \mu_0 \ell \overline{I} \times \overline{H}$, ahol $\overline{I}$ iránya a pozitív töltésáramlás iránya. Az ábrán látható esetre:

$$\overline{F}_2 = \mu_0 \ell \overline{I}_2 \times \overline{H}_1 .$$

Szemléletesen: az elmozdulás iránya az erővonalak „sűrűsödése” felöl a „ritkulás” irányában.

Egy 1 A áramot vivő vezetőtől 1 m távolságra a térerősség nagysága $H = 0{,}159\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$, egy $H = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ erősségű mágneses térbe helyezett 1 A áramot vivő vezetőre ható erő nagysága $F = 4\pi\,10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

A vizsgált teret kitöltő anyagtól függő térjellemző a $B$ mágneses indukció, ami szintén vektormennyiség, SI mértékegysége Tesla[1] tiszteletére

$$[B] = \mathrm{T} = \mathrm{tesla} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} .$$

Adott $H$ térerősségnél

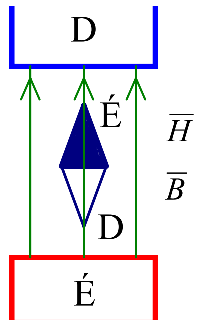
$$\overline{B} = \mu_0 \mu_r \overline{H} = \mu\,\overline{H} ,$$

itt $\mu_r$ – a teret kitöltő közeg anyagára jellemző dimenzió nélküli szám, a relatív permeabilitás, $\mu$=$\mu_0\mu_r$ – a teljes permeabilitás. A relatív permeabilitás gyakran nem állandó, a térerősségtől és a kiindulási mágneses állapottól is függhet.

A $H = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ erősségű mágneses tér indukciója levegőben ($\mu_r$=1) $B$=$4\pi 10^{-7}$ T.

A $B$ indukció iránya általában $H$ irányával egyezik, a tér vizsgált pontjába helyezett iránytű északi sarkának irányába mutat, a mágnesen (pl. az iránytűn) belül a déli pólustól az északi, mágnesen kívül az északitól a déli felé. Az indukcióvonalak tehát a mágnesből az északi pólusánál lépnek ki és a déli felé haladnak. Az iránytű északi pólusa a földrajzi északi sark felé mutat.

[1] Tesla, Nikola (1856-1942) szerb származású mérnök, kutató




*A mágneses tér definíció szerinti iránya*

Bizonyos anyagok – a ferromágneses anyagok – belsejében az indukció jelentősen megnő a vákuumhoz képest. Ennek egyszerű, szemléletes magyarázata az ilyen anyagokban meglévő molekuláris köráramok hozzájárulása a külső tér indukciójához. $\mu_r$ értéke azt fejezi ki, hogy az indukció hányszorosára nő az anyag nélküli (vákuum-beli) állapothoz képest, nagysága:

$$1 \le \mu_r \le 10^3\text{-}10^6.$$

$\mu_r$ meghatározása bonyolult számítással vagy méréssel történhet.
A mágneses indukciót is indukcióvonalakkal szemléltetik.
Egy $B$ indukciójú mágneses térbe helyezett, $I$ áramot vivő $\ell$ hosszúságú vezetőre ható erő tetszőleges anyagú közegben:

$$\overline{F} = \ell \overline{I} \times \overline{B}\ .$$

Az ábrán látható esetre $\overline{F}_2 = \ell \overline{I}_2 \times \overline{B}_1$.
Egy 1 T indukciójú mágneses térbe helyezett 1 A áramot vivő vezetőre ható erő nagysága $F = 1\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

A $B$ indukció adott $A$ felületre vett integrálja a felület $\Phi$ fluxusa: $\Phi = \int_A \overline{B} d\overline{A}$, homogén térben $\Phi = BA$. A fluxus skalár mennyiség, SI mértékegysége Weber[2] tiszteletére

$$[\Phi]=\mathrm{Wb} = \mathrm{weber} = \mathrm{Vs}.$$

A mágneses tér szemléltetésénél az erővonalakat gyakran fluxusvonalaknak értelmezik, vagyis a tér azon részén, ahol nagyobb az indukció, ott sűrűbbek a vonalak.
1 T indukciójú homogén mágneses térben az 1 m$^2$ felületen áthaladó fluxus nagysága 1 Wb.

A magyar műszaki nyelvben az indukció szó két fogalmat is jelent:

- a mágneses tér jellemzője (tulajdonképpen fluxus sűrűség),
- jelenség, ami a villamos vezetőben feszültséget hoz létre (tulajdonképpen töltésszétválasztás).

A gerjesztési törvény (Ampère törvénye)

A mágneses körök számításának legfontosabb törvénye szerint a $\overline{H}$ térerősség vektor vonalmenti integrálja tetszőleges zárt görbe mentén megegyezik a görbével határolt $A$ felületen áthaladó áramok algebrai összegével, a felület $\Theta$ gerjesztésével. Általános alakja $J$ áramsűrűségű térbeli áramlás feltételezésével:

$$\oint \overline{H} d\overline{\ell} = \int_A \overline{J} d\overline{A} = \Theta\ .$$

[2] Weber, Wilhelm Eduard (1804-1891) német fizikus

A gerjesztés skalár mennyiség, SI mértékegysége [$\Theta$]=A.
Amennyiben a vizsgált görbe homogén térerősségű szakaszokon halad keresztül, akkor a bal oldalon álló integrál, ha a töltéshordozók koncentráltan, villamos vezetőkben áramlanak, akkor a jobb oldalon álló integrál összegezéssé egyszerűsödhet: $\sum_i H_i \ell_i = \sum_j I_j$ .

Állandó $\mu$ permeabilitás esetén a gerjesztési törvény más alakban is felírható:

$$\oint \overline{H} d\overline{\ell} = \oint \frac{\overline{B}}{\mu} d\overline{\ell} = \frac{1}{\mu} \oint \overline{B} d\overline{\ell} = I \text{, vagy } \oint \overline{B} d\overline{\ell} = \mu I \text{, itt } \mu = \mu_0 \mu_r .$$

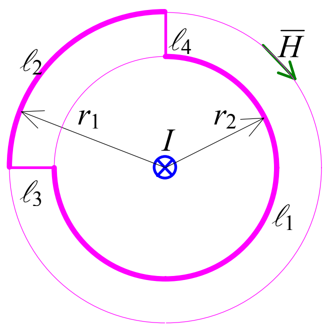
**Példa**
Vizsgáljunk egy $I$ áramot vivő vezetőt. Tőle $a$ távolságra a mágneses térerősség:

$$H = \frac{I}{2\pi a} .$$

Ha (nem ferromágneses közegben) a tetszőleges zárt görbe a vezetőtől $a$ távolságra rajzolt ($a$ sugarú) körív és a körüljárás iránya megegyezik $\overline{H}$ irányával, akkor

$$\oint \overline{H} d\overline{\ell} = \frac{I}{2\pi a} \oint d\ell = \frac{I}{2\pi a} 2\pi a = I .$$

Hasonló eredményt kapunk akkor is, ha egy eltérő sugarú köríveken záródó görbét vizsgálunk az alábbi ábra szerint:




*A gerjesztési törvény illusztrálása*

$\ell_1$ mentén $H_1 = \dfrac{I}{2\pi r_1}$ ,

$\ell_3$ és $\ell_4$ mentén $H$ merőleges az integrálási útra, így a skalár szorzat $\overline{H} d\overline{\ell} = 0$ ,

$\ell_2$ mentén $H_2 = \dfrac{I}{2\pi r_2}$ .

$$\left.\begin{aligned} \int_{\ell_1} H_1 d\ell &= \frac{I}{2\pi r_1} \frac{3}{4} 2\pi r_1 = \frac{3}{4} I \\ \int_{\ell_2} H_2 d\ell &= \frac{I}{2\pi r_2} \frac{1}{4} 2\pi r_2 = \frac{1}{4} I \end{aligned}\right\} \oint \overline{H} d\overline{\ell} = I$$

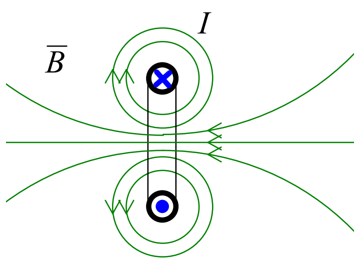
A térerősség ismeretében a létrehozó vagy a létrehozásához szükséges gerjesztés mindig kiszámítható. $|\overline{H}| = \text{const.}$ görbe mentén történő integráláskor $\overline{H} d\overline{\ell} = H d\ell$ . Ha a választott görbe homogén szakaszokra bontható, akkor

$$\oint \overline{H} d\overline{\ell} = \sum_i H_i \ell_i = \Theta .$$

<u>A mágneses erővonalkép (fluxuskép)</u>

*Áramjárta körvezető (áramhurok)*

Hengerszimmetrikus teret hoz létre, erővonalképének metszete hasonló a két, ellentétes irányú áramot vivő vezető fluxusképéhez.

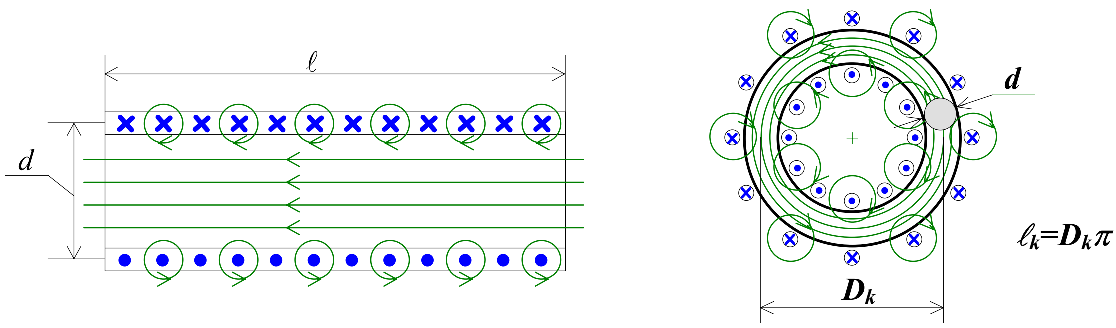



*Áramjárta körvezető (hurok, menet) mágneses tere*

*Szolenoid, toroid*

A szolenoid tekercsen belül koncentrálódik a mágneses tér, a tekercsen kívül szétszóródik, ezért elhanyagolható, amennyiben a tekercs hossza sokkal nagyobb az átmérőjénél, $\ell \gg d$, $\ell>(5\text{-}10)d$. Hasonló a helyzet toroid tekercsnél $D \gg d$, $D>(5\text{-}10)d$ esetén.

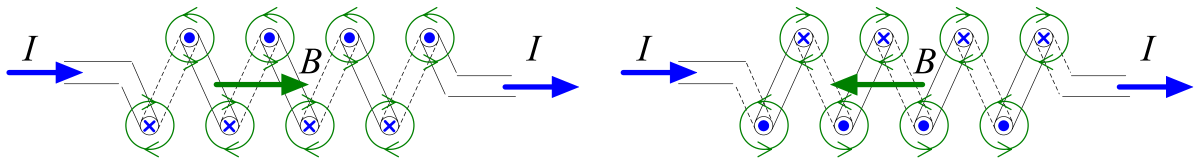
Ezeknél a tekercselrendezéseknél az egyes vezetők (menetek) sorba kapcsoltak, bennük azonos áram folyik, ezért a gerjesztési törvény alkalmazásakor $\Theta=H\ell=NI$, ahol $N$ - a menetszám (a vezetők száma).




*A szolenoid és a toroid mágneses tere*

A gerjesztési törvény alkalmazásakor toroidnál rendszerint a $D_k$ közepes átmérő által meghatározott $\ell_k$ közepes erővonalhosszal számolnak.

Adott áramirány mellett egy tekercs által létrehozott mágneses tér iránya a <u>tekercselés</u> irányától függ.



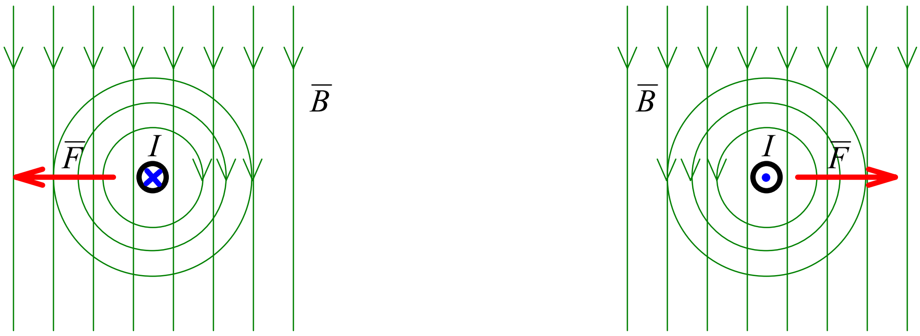

*Jobb- és balmenetű tekercs mágneses tere*

A továbbiakban <u>jobbmenetű</u> tekercseket feltételezünk.

<u>Áramjárta vezetőre ható erő iránya</u>

Az erőre kapott összefüggés alapján:

$$\overline{F} = \ell\overline{I} \times \overline{B}\,.$$




*Áramjárta vezetőre ható erő homogén térben*

Az eredő mágneses indukció a komponensek vektoriális összege a tér minden pontjában.

Hasznos és szórt mágneses tér

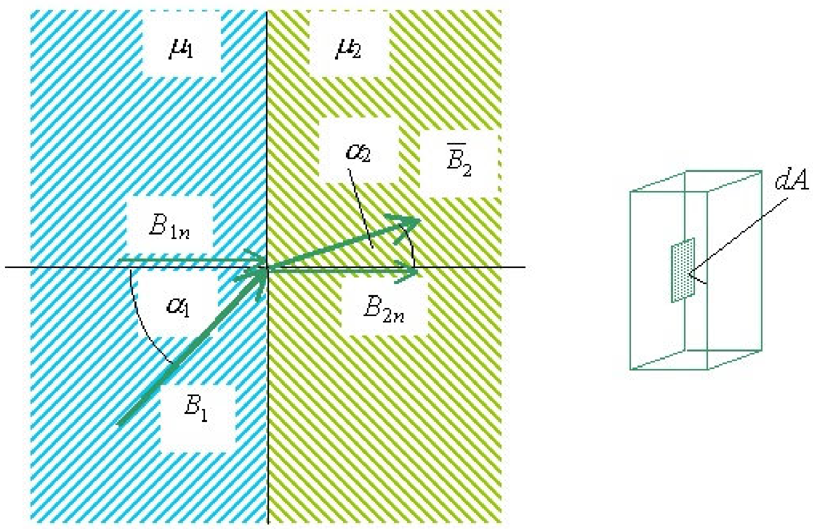
Csatolt tekercseknél (ilyen a transzformátor és a forgó villamos gép állórész-forgórész tekercselése) az egyik tekercs által létrehozott fluxusnak csak egy része kapcsolódik a másik tekerccsel, a fluxus többi része kiszóródik. Ez utóbbit nevezik szórt fluxusnak. A szórás mértékét a $\sigma$ szórási tényezővel jellemzik. Az irodalomban több definíció is található:

$$\sigma = \frac{\phi_s}{\phi_e} \ (0 \le \sigma \le 1), \text{ vagy } \sigma = \frac{\phi_s}{\phi_h} \ (\sigma \gtrless 1),$$

ahol a $\phi_e$ eredő (teljes) fluxus a $\phi_s$ szórási és $\phi_h$ hasznos fluxus összege $\phi_e=\phi_s+\phi_h$.
Bizonyos esetekben a szórásnak fontos szerepe van, pl. a szórási induktivitás korlátozza a zárlati áramot.

A mágneses tér törési törvényei

Különböző permeabilitású anyagok határfelületén történő áthaladáskor a $\overline{H}$ térerősség és a $\overline{B}$ indukció iránya megváltozik.

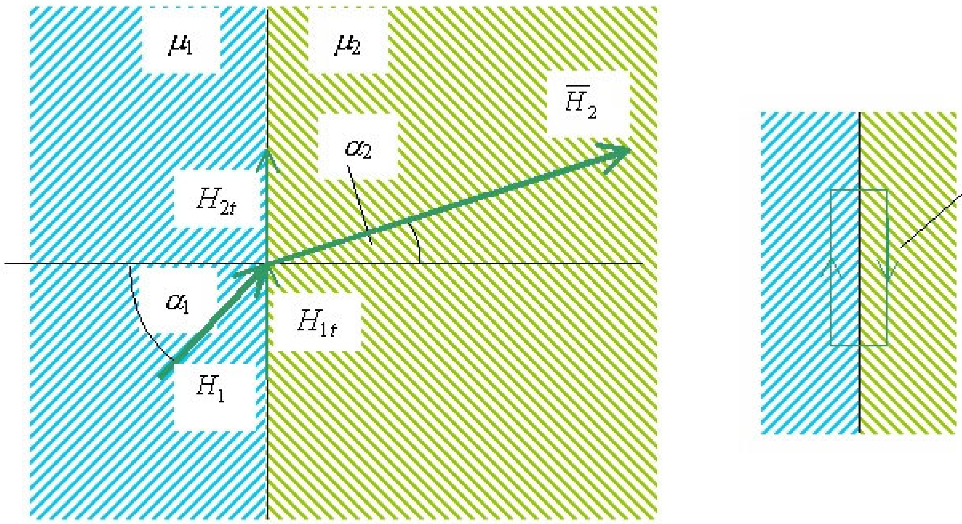



*Az indukció vektor törése*

A határréteg egy elemi $dA$ felületén áthaladó teljes $\Phi$ fluxus a két anyagban, mindkét réteg felöl megközelítve azonos, mivel az indukcióvonalak mindig zártak:

$$B_{1n}dA=B_1\cos\alpha_1 dA=B_2\cos\alpha_2 dA= B_{2n}dA,$$

vagyis a $\overline{B}$ indukcióvektor normális összetevője változatlan értékű marad.




*A térerősség vektor törése*

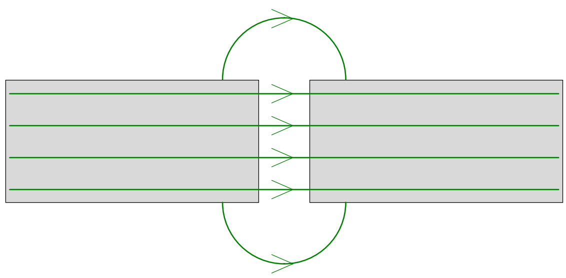
A gerjesztési törvény értelmében a $\overline{H}$ térerősség zárt görbére vett integrálja nullát kell adjon, ha a határrétegben nincs gerjesztés (nem folyik áram):

$$H_{1t}d\ell = H_1 \sin\alpha_1 d\ell = H_2 \sin\alpha_2 d\ell = H_{2t} d\ell,$$

vagyis a $\overline{H}$ térerősség vektor tangenciális összetevője marad változatlan értékű.
Határrétegnél az indukció vektor érintőleges, a térerősség vektor normális összetevője változik. A fentiek alapján
$H_1 \sin\alpha_1 = H_2 \sin\alpha_2$, vagy a térerősséget az indukcióval felírva:

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_1}{\mu_0\mu_{r1}}\sin\alpha_1 &= \frac{B_2}{\mu_0\mu_{r2}}\sin\alpha_2 \\ B_1\cos\alpha_1 &= B_2\cos\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\sin\alpha_1}{\mu_0\mu_{r1}\cos\alpha_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\mu_0\mu_{r2}\cos\alpha_2} \Rightarrow \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}.$$

Ha $\mu_{r1} \gg \mu_{r2}$ (pl. vas-levegő határon $\mu_{rv}=10^6$, $\mu_{r\ell}=1$), akkor $tg\alpha_1 \gg tg\alpha_2$, $\alpha_1 \gg \alpha_2$, vagyis $\alpha_1 \sim 90°$, $\alpha_2 \sim 0$. Ez azt jelenti, hogy a szórási erővonalak a vasból a levegőbe közel merőlegesen lépnek ki.



*Az erővonalak iránya vas-levegő határon*

Az indukció törvény (Faraday[3] törvénye)
Az elektrotechnika egyik legfontosabb alaptörvénye, az általa leírt jelenség felfedezése tette lehetővé a villamos energia nagy teljesítményben való előállítását és elterjedését.
Ha egy vezetőkör – hurok áramkör – által körülfogott fluxus bármilyen okból megváltozik, a vezetőben feszültség keletkezik (indukálódik) – villamos tér jön létre.
Az indukált feszültség arányos a fluxus időegység alatti megváltozásával:

[3] Faraday, Michael (1791-1867) angol fizikus

$$u_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Az indukált feszültség nem a fluxus, hanem a fluxusváltozás nagyságától és irányától függ.
a) Nyugalmi indukcióról, transzformátoros (indukált) feszültségről beszélünk, amikor a vezető nyugalomban van (a vezető térben áll), a vele kapcsolódó fluxus pedig időben változik áramváltozás vagy a mágneses kör megváltozása miatt.
b) Mozgási indukció akkor lép fel, mozgási (rendszerint forgási) indukált feszültség akkor keletkezik, amikor (állandó) mágneses térben a vezető mozgást végez és eközben „metszi” a mágneses tér erővonalait, vagyis a mozgásnak van az erővonalakra merőleges összetevője.
Az indukció során a mágneses tér megváltozása villamos teret hoz létre.
A fluxusváltozás helyett az indukált feszültség fogalmát használva a mágneses jelenséget villamos áramköri jelenséggel helyettesítjük.
A nyugalmi és a mozgási indukció a gyakorlatban sokszor egyidejűleg van jelen.

Fontos: ha a térben változó fluxusok vannak, akkor a villamos tér nem potenciálos, két tetszőleges pont között a feszültség nem független az úttól! – ugyanis függ a körülzárt fluxustól, illetve annak változásától. A villamos potenciálnak mint térjellemzőnek ilyenkor nincs értelme.
Zárt hurokban (áramkörben) az indukált feszültség a hurokellenállásnak megfelelő áramot létesít. Az ellenállás *IR* ohmos feszültségesése – ha a körben nincs más feszültségforrás – egyensúlyt tart az $U_i$ indukált feszültséggel, Kirchhoff huroktörvénye alapján:

$$\sum_j R_j I_j + \sum_k U_{ik} = 0.$$

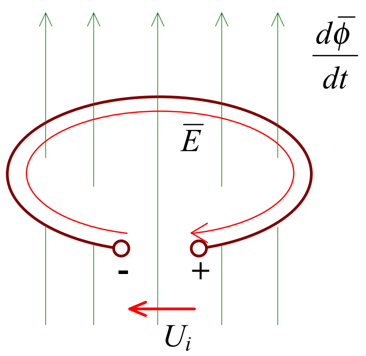
Általános esetben a huroktörvény az ohmos feszültségesések, a belső és indukált feszültségek eredőjére igaz:

$$\sum_j R_j I_j + \sum_k U_{ik} + \sum_n U_{bn} = 0.$$

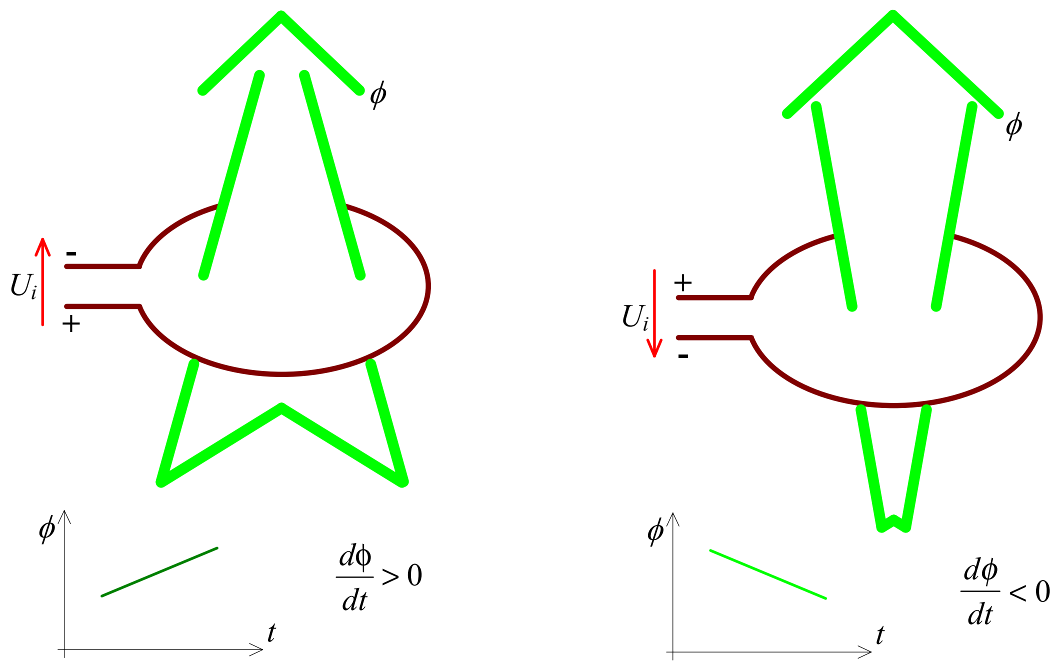
Itt $U_i$ az indukált, $U_b$ a nem indukció útján (pl. galvánelemmel) létrehozott belső feszültséget jelenti.

Nyugalmi indukció
A fluxusváltozás és a töltésszétválasztó villamos térerősség pozitív iránya az ábra szerinti,

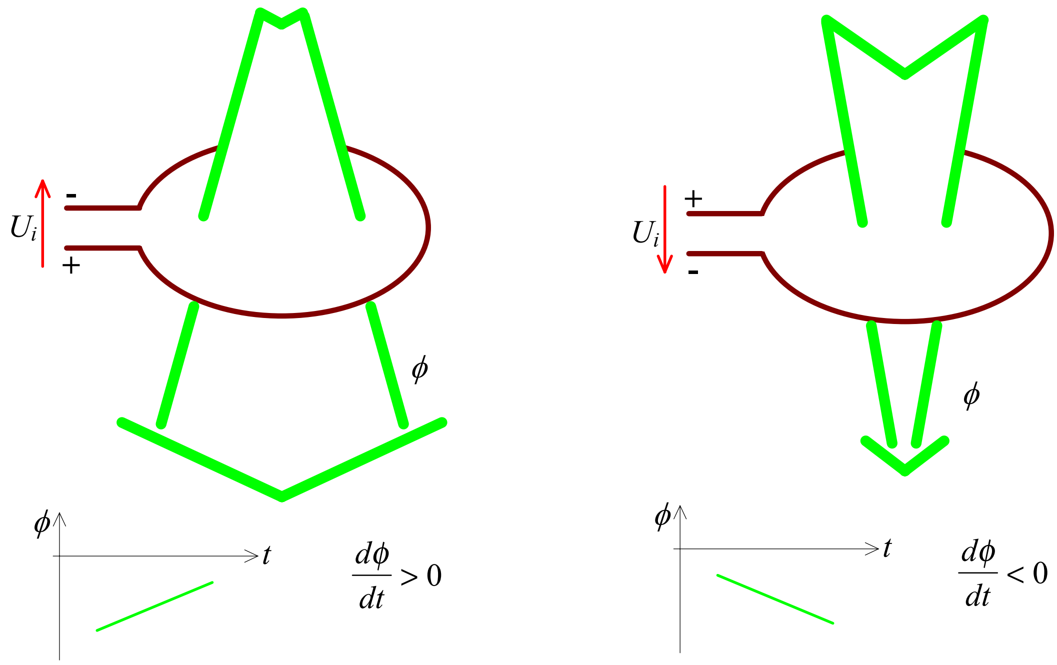
$$U_i = -\int \overline{E} d\overline{\ell}.$$




*A nyugalmi indukció pozitív irányai*




*Az indukált feszültség polaritása különböző irányú fluxus és fluxusváltozás esetén* ($\phi > 0$)




*Az indukált feszültség polaritása különböző irányú fluxus és fluxusváltozás esetén* ($\phi < 0$)

<u>A tekercsfluxus</u>

Amennyiben a változó fluxust nem egyetlen hurok, hanem $N$ sorba kapcsolt menetből álló tekercs fogja körül és a menetek azonos irányúak (azonos irányban gerjesztenek), akkor az egyes menetekben indukált feszültségek összeadódnak. Ha minden menet azonos nagyságú fluxust fog át, akkor az eredő indukált feszültség $N$-szerese az egy menetben indukált feszültségnek (a menetfeszültségnek):

$$u_{iN}(t) = N\frac{d\phi(t)}{dt}.$$

A tekercs egy-egy menetével kapcsolódó fluxusok összegezésével kapjuk a $\psi = N\phi$ tekercsfluxust, amivel a tekercs eredő indukált feszültsége:

$$u_i(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

A fluxushoz hasonlóan a tekercsfluxus is skalár mennyiség, SI mértékegysége [$\Psi$]=Wb=Vs.

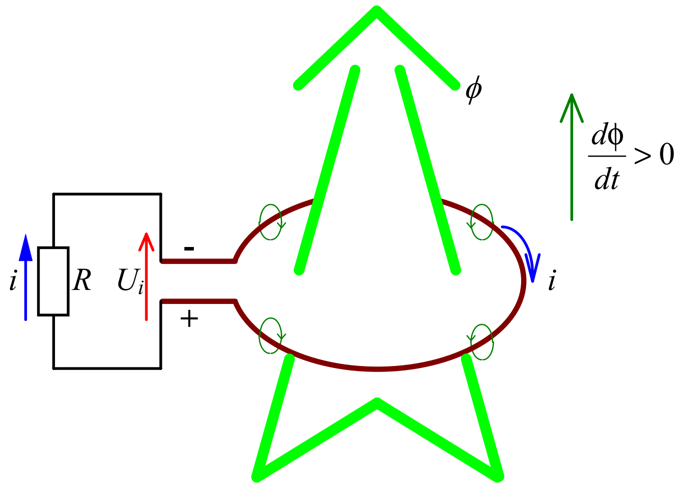
Lenz[4] törvénye

Az energia megmaradásának elvéből következő törvény szerint az indukció eredményeként keletkező áramok és erők olyan hatásúak, hogy gátolják az előidéző állapotváltozást.

Nyugalmi indukció esetén a fluxusváltozás következtében indukálódó $u_i = \frac{d\phi}{dt}$ feszültség zárt áramkörben olyan $i$ áramot kelt, amelyik az indukált feszültséget létrehozó luxusváltozást gátló, késleltető mágneses teret (mágneses tér változást) hoz létre, az indukáló hatást csökkenti. A keletkező mágneses tér a kiindulási állapot fenntartására törekszik.

Ez a törvényszerűség az önindukció alapja.

Mozgási indukciónál az indukálódó feszültség zárt áramkörben olyan $i$ áramot kelt, amelyik a mozgással ellentétes irányú (a mozgást fékező) erőt vagy nyomatékot létesít, amivel az indukáló hatást csökkenti.




*Az indukált feszültség keltette áram mágneses hatása*

A mozgási indukció

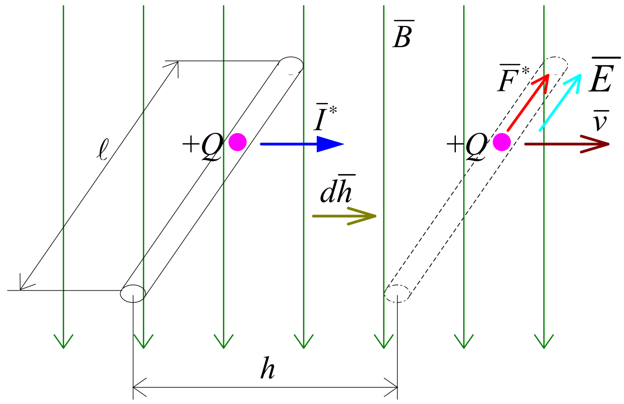
Feszültség indukálódik egy időben állandó mágneses tér mentén, arra merőleges irányban mozgatott vezetőben is, mivel a vezetővel együtt mozgó töltésekre erő hat. Ez az erő tulajdonképpen a töltésekre hat, azok adják át a vezetőnek.

(Áramjárta vezetőnél a fellépő erő: $\overline{F} = \ell\overline{I} \times \overline{B}$.)

Tekintsük a vezetőben lévő töltés mozgását töltésáramlásnak, $\overline{I}^*$ áramnak. $\overline{I}^*$ nem „igazi" áram, de, mivel töltéshordozó mozgás, egy $\overline{F}^*$ erőhatás számítható belőle. Az $\overline{I}^*$ áram iránya a vezető mozgásának irányába mutató $d\overline{h}$ egységvektor irányával egyezik.

[4] Lenz (Lenc), Heinrich Friedrich Emil (1804-1865) német származású fizikus

Ha a töltést tartalmazó vezető $t$ idő alatt $h$ távolságot tesz meg, sebessége $v = \frac{h}{t}$, a sebesség vektor iránya a mozgás irányába mutat $\overline{v} = \frac{h}{t}\overline{dh}$ .




*A mozgási indukció egy lehetséges értelmezésének illusztrációja*

Ha $t$ idő alatt $Q$ töltés halad át egy adott keresztmetszeten, akkor az $\overline{I}^{*}$ fiktív áram nagysága:

$$\overline{I}^{*} = \frac{Q}{t}\overline{dh} .$$

Behelyettesítve az erő képletébe:

$$\overline{F}^{*} = h\overline{I}^{*} \times \overline{B} = \frac{h}{t}Q\overline{dh} \times \overline{B} = Q\overline{v} \times \overline{B} .$$

Ez az $\overline{F}^{*}$ erő a vezető töltéseire hat, töltésszétválasztó erőként, tehát $F^{*}$-al azonos irányú $E$ erősségű villamos tér keletkezik. Az $\overline{E}$ villamos térerősség a pozitív töltésekre ható erő irányába mutat, nagysága az egységnyi töltésre ható erővel egyezik.

$\overline{E} = \frac{\overline{F}^{*}}{Q} = \overline{v} \times \overline{B}$, ennek a térerőnek a hatására a vezető két végén különnemű töltések halmozódnak fel, ami indukált feszültség létrejöttét jelenti (töltésszétválasztás). Egy $\ell$ hosszúságú vezető két vége között mérhető feszültség (homogén tér feltételezésével) $U_i = -\overline{E}\ell = -\overline{v} \times \overline{B}\ell = \ell\overline{B} \times \overline{v}$, ha a feszültség pozitív iránya a (+) töltések felől a (-) töltések felé mutat. Ez az $U_i$ indukált feszültség belső, forrásfeszültség jellegű, a töltés-szétválasztó $E$ térerősség (elektromotoros erő) hatására jön létre

$$\int \overline{E}d\overline{\ell} = -\frac{d\phi}{dt}.$$

Az indukált feszültség zárt áramkörben egy „valódi” áramot indít, amelynek nagysága az indukált feszültségtől és az áramkörtől függ. Ezen áram és az indukció kölcsönhatásaként olyan irányú erő lép fel a vezetőn, amelyik – Lenz törvénye értelmében – annak mozgása ellen hat, az erővonalak a mozgás irányában „sűrűsödnek”. Ez azt jelenti, hogy ha zárt az áramkör, a vezető mozgatásához folyamatosan erőre, energiára van szükség.

Két erőhatást látunk:

- a vezetővel együtt mozgó töltésekre ható erő, aminek következménye az $E$ villamos térerősség (töltés-szétválasztó erő) és az $U_i$ indukált feszültség,

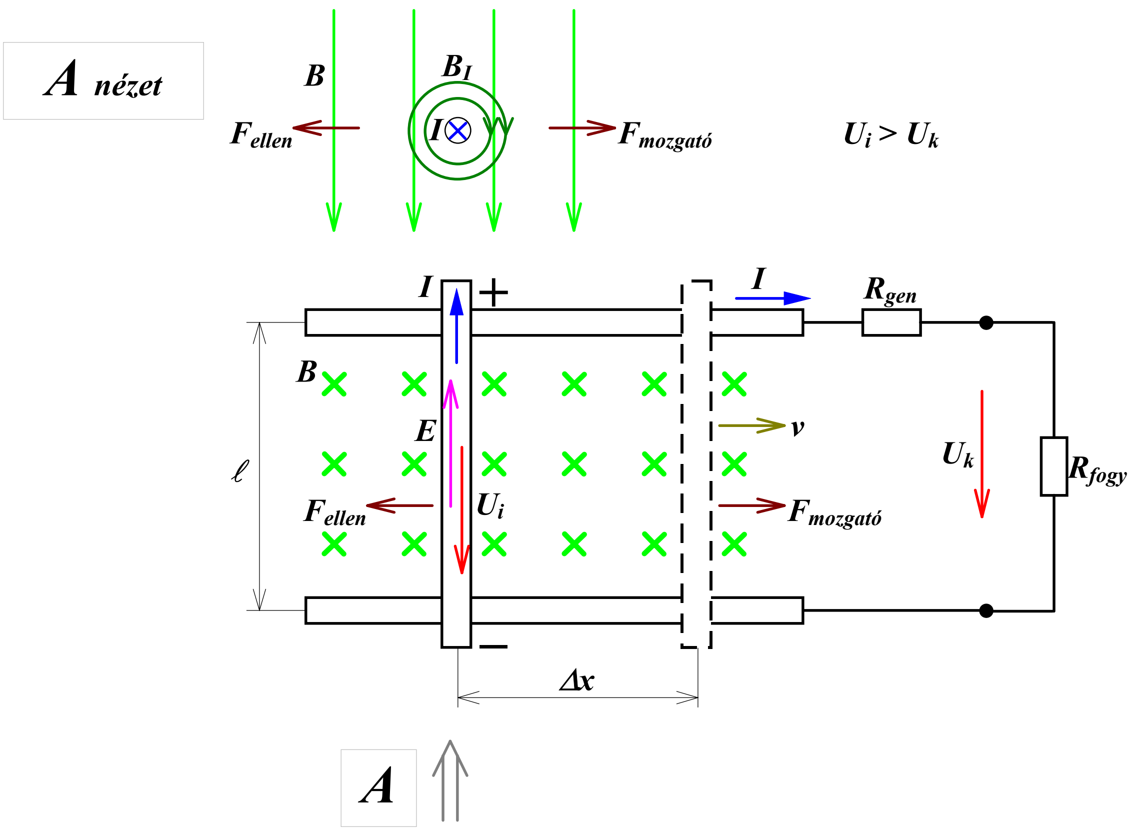
- ennek az $U_i$ feszültségnek a hatására folyó áram következtében a vezetőre (a vezetőn belül mozgó töltésekre) ható, a vezető mozgásával ellentétes irányú erő.

E két erő iránya nem azonos.

A villamos generátor működési elve

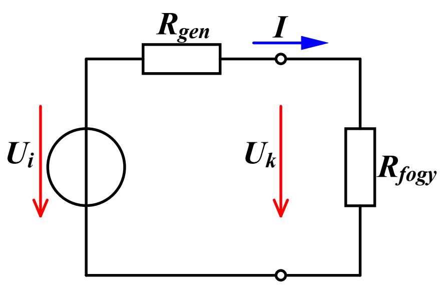
Tekintsük az ábrán látható elrendezést: két vezető sínre azonos síkban fektetett merőleges vezető rúd mozoghat egy merőleges *B* indukciójú mágneses térben, a sínek és a rúd között ellenállás-mentes csúszókontaktus van. A rudat $F_{mozgató}$ állandó nagyságú külső erővel mozgatjuk, sebessége *v*.

A fluxusváltozás, ha a rúd $\Delta t$ idő alatt $\Delta x$ távolságot tesz meg $\Delta\Phi = B\ell\Delta x$, így a rúdban indukálódó feszültség: $U_i = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\ell = Bv\ell$, általános esetben $U_i = \left(\overline{B}\times\overline{v}\right)\overline{\ell}$.




*A generátor működésének elvi vázlata*

Az $U_i$ indukált feszültség hatására kialakuló *I* áram a sínek és a rúd együttes $R_{gen}$ (generátor) ellenállás valamint a táplált fogyasztó $R_{fogy}$ ellenállástól függ. A rúdban folyó *I* áram hatására keletkező $F_{ellen} = B\ell I$ erő – Lenz törvénye szerint – a mozgással ellentétes irányú.




*A generátor helyettesítő áramköre a feszültség egyenlet alapján*

Ha a súrlódási veszteséget elhanyagoljuk, akkor a befektetett mechanikai teljesítmény megegyezik a (termelt) teljes villamos teljesítménnyel:

$$P_{vill}=U_iI=Bv\ell I=F_{ellen}v=P_{mech}.$$

Amennyiben a mechanikai veszteség (pl. súrlódási) nem elhanyagolható, akkor a $P_{mech}$ mechanikai teljesítmény azt is tartalmazza, így $P_{vill} < P_{mech}$.

A generátor kapcsain megjelenő $U_k = U_i \dfrac{R_{fogy}}{R_{gen}+R_{fogy}}$ kapocsfeszültség megegyezik a fogyasztó $I\,R_{fogy}$ feszültségével. Üresjárásban ($R_{fogy}=\infty$) $U_k=U_i$. Az $U_i$ indukált feszültség tehát a két ellenálláson eső feszültséggel tart egyensúlyt:

$$U_i=B\ell v=IR_{gen}+IR_{fogy}=IR_{gen}+U_k, \text{ vagyis } U_i > U_k.$$

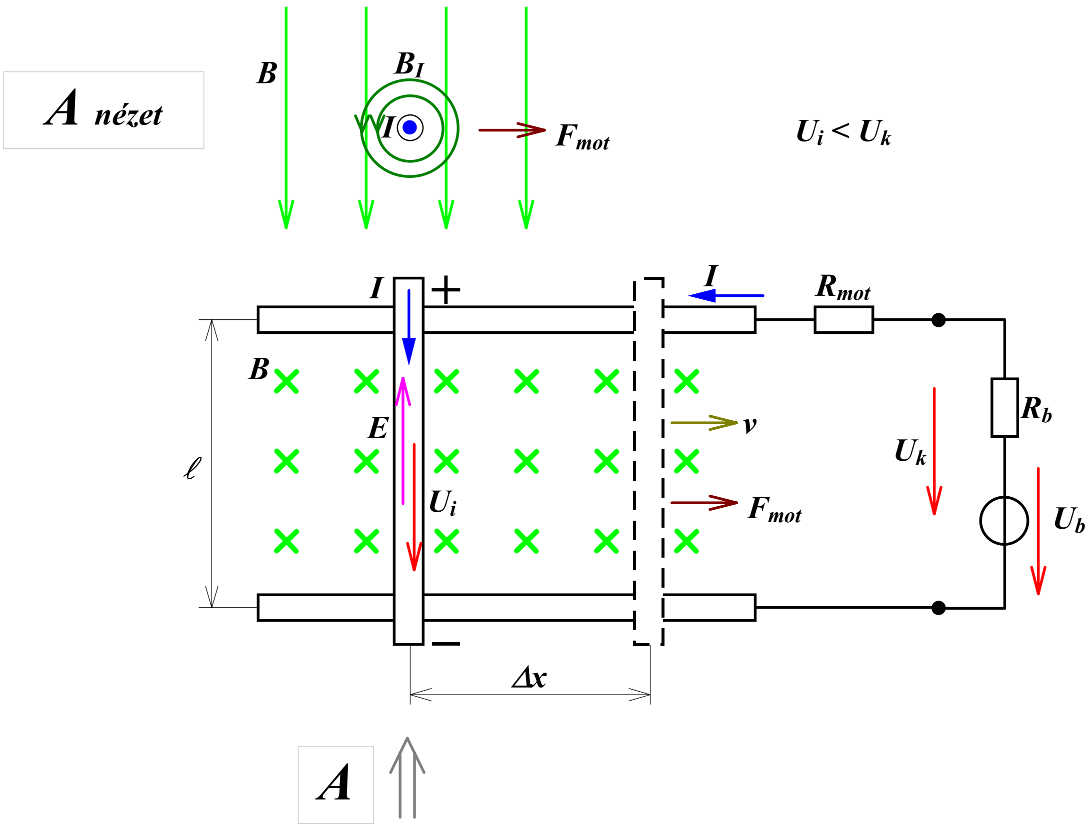
A leadott villamos teljesítmény az $R_{fogy}$ ellenállásra kerül, aránya a teljes villamos teljesítményhez – a generátor hatásfoka – a rúd és a sínek (generátor, belső kör) $R_{gen}$, és a külső kör $R_{fogy}$ ellenállásának arányától függ:

$$\eta=\frac{I^2R_{fogy}}{U_iI}=\frac{I^2R_{fogy}}{U_iI}=\frac{I^2R_{fogy}}{I^2\left(R_{gen}+R_{fogy}\right)}=\frac{R_{fogy}}{\left(R_{gen}+R_{fogy}\right)}=\frac{U_iI-I^2R_{gen}}{U_iI}=\frac{U_k}{U_i}.$$

A generátorban keletkező $I^2R_{gen}$ villamos veszteség a hatásfok számításánál nem elhanyagolható.

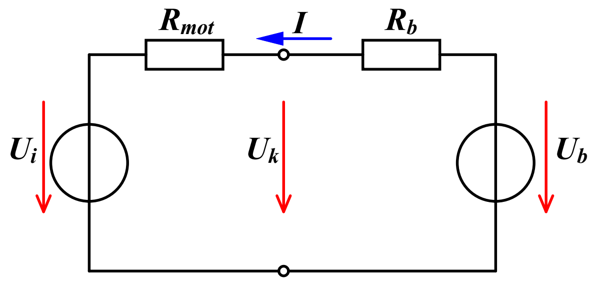
## A villamos motor működési elve

Az előzőhöz hasonló elrendezésben az $U_b$ feszültségű tápforrás a zárt áramkörben $I$ áramot létesít, amit a forrás $R_b$, valamint a vezető sínek és a rúd $R_{mot}$ ellenállása korlátoz.




*A motor működésének elvi vázlata*

A $B$ indukciójú homogén mágneses térben lévő vezetőre a rajta átfolyó áram következtében $F_{mot}$ erő hat, ami mozgásba hozza. A vezető mozgása következtében változik a vele kapcsolódó fluxus, tehát a generátor modellhez hasonlóan benne feszültség indukálódik. Az $U_i$ indukált feszültség – Lenz törvénye szerint – igyekszik ellentétes irányú áramot létesíteni, mint az $U_b$ feszültség, vagyis az $I$ áramot (vele együtt az $F_{mot}$ erőt is) csökkenteni és ezzel a mozgást akadályozni igyekszik.




*A motor helyettesítő áramköre a feszültség egyenlet alapján*

Az $U_k$ kapocsfeszültség tart egyensúlyt az $U_i$ indukált feszültség és a motor ellenállásán fellépő $IR_{mot}$ feszültség eredőjével: $U=U_i+IR_b+IR_{mot}$, illetve $U_k=U_i+IR_{mot}$.
Motor üzem esetében $U_i<U_k$.
Ha a súrlódási veszteséget elhanyagoljuk, akkor a $P_{fel}$ felvett villamos teljesítmény megegyezik a leadott $P_{mech}$ mechanikai teljesítménnyel:

$$P_{fel}=U_kI\ ,\ P_{mech}=F_{mot}v=\ell IBv=U_iI.$$

A motorban keletkező villamos veszteség ebben az esetben az $R_{mot}$ ellenállás vesztesége, a felvett villamos teljesítmény a mozgatást és a veszteséget fedezi:
$P_{veszt}=I^2R_{mot}$, $P_{fel}=P_{mech}+P_{veszt}$ – $U_kI=U_iI+I^2R_{mot}$.
A motor hatásfoka:

$$\eta=\frac{P_{mech}}{P_{fel}}=\frac{U_iI}{U_kI}=\frac{U_i}{U_k}=\frac{U_k-IR_{mot}}{U_k}=\frac{U_i}{U_i+IR_{mot}}\ .$$

Amennyiben a mechanikai veszteség (pl. súrlódási) nem elhanyagolható, akkor a $P_{mech}$ mechanikai teljesítmény azt is tartalmazza, így a tengelyen leadott $P_{teng}$ teljesítmény kisebb a felvett villamos teljesítménynél $P_{teng} < P_{vill}$.

# A ferromágneses anyagok jellemző tulajdonságai, a mágneses körök számítási elvei

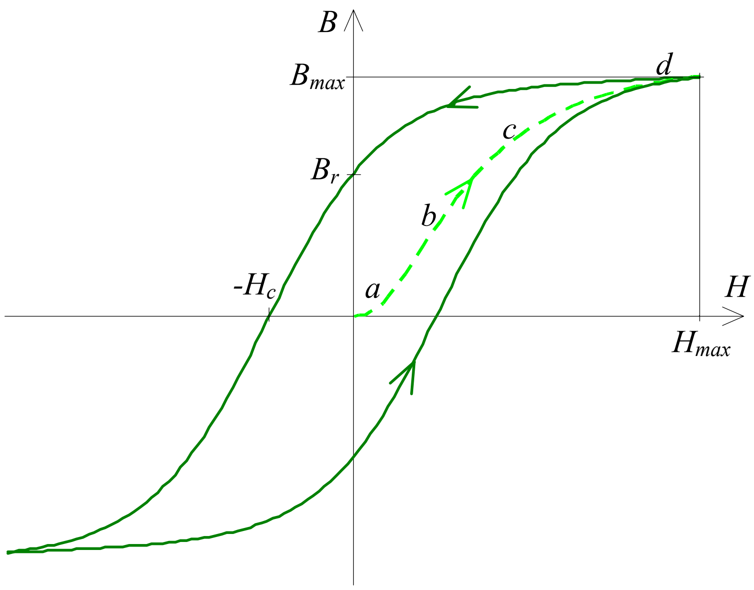
A ferromágneses anyagok

Fizikában dia- para- és ferromágneses anyagokat különböztetnek meg, az elektrotechnikai gyakorlatban általában minden nem-ferromágneses anyag vákuumnak (levegőnek) tekinthető és relatív permeabilitása $\mu_r$=1. A ferromágneses anyagok (vas, nikkel, kobalt és ötvözeteik) relatív permeabilitása igen nagy, nagyságrendje $10^3$-$10^6$. Nem-ferromágneses összetevőkből is készítenek jól mágnesezhető ötvözeteket (pl. Ag-Mn-Al).

A ferromágneses anyagok indukció-térerősség összefüggése erősen nemlineáris, ezért annak meghatározása rendszerint méréssel történik.

A mágnesezési görbe

Az ún. első mágnesezési görbe a mágneses hatásnak még nem kitett, vagy teljesen lemágnesezett anyag indukció változását mutatja a térerősség lassú változtatásakor.




*A mágnesezési görbe tipikus alakja*

A görbének 4 jellegzetes része van:

- a - induló szakasz,
- b - lineáris szakasz,
- c - könyök szakasz,
- d - telítési szakasz.

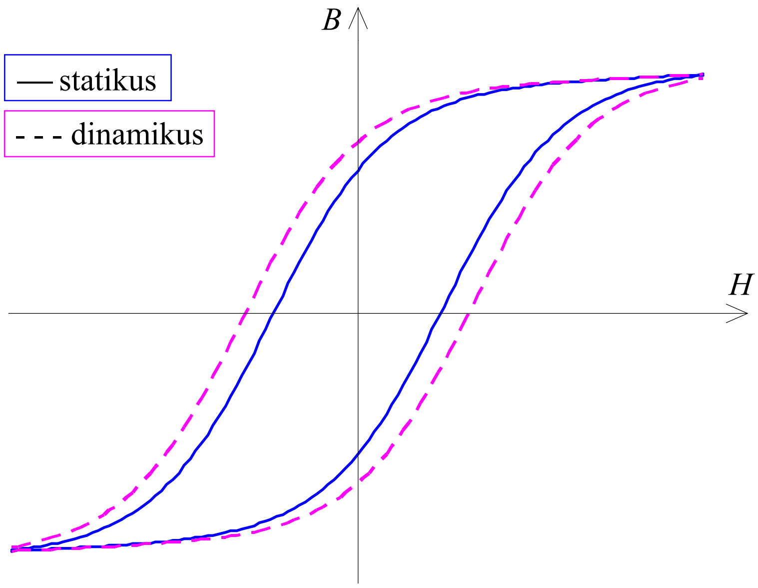
Lassú változásnál a görbe leszálló ága az első mágnesezési görbe felett halad, hiszterézises: *B* változása késik *H* változásához képest (késlekedés=hiszterézis). *H*=0-nál a remanens indukció $B_r$ > 0, amit csak ellenkező előjelű $-H_c$ koercitív térerősséggel lehet megszüntetni. Adott anyagnál a permeabilitás *B*/*H* nagysága nem egyértékű, változása nemlineáris, függ a mágneses előélettől, a *H* térerősség megelőző értékétől, a változás sebességétől és mértékétől.

A legnagyobb hiszterézis görbe a telítési indukcióval meghatározott $B_{max}$ és $H_{max}$ csúcsértékekhez tartozik, (a telítési indukció felett $\mu_r$~1) a kisebb csúcsértékek hiszterézise ezen belül helyezkedik el.

Lassú változásnál statikus hiszterézis görbéről beszélünk.

Dinamikus hiszterézis görbe

Hálózati vagy nagyobb frekvenciájú váltakozó árammal létrehozott váltakozó mágneses tér esetén a munkapont minden periódus alatt egy teljes hiszterézis görbét ír le. A változó fluxus hatására a ferromágneses anyagban feszültség indukálódik, amely ún. örvényáramot hoz létre. Lenz törvénye értelmében az örvényáram keltette mágneses tér tovább késlelteti a luxusváltozást, ezért a hiszterézis görbe a frekvencia növekedésével „kövéredik” a statikushoz képest.

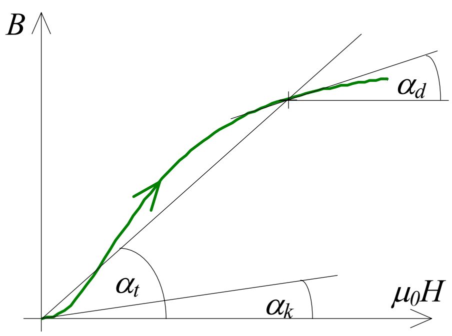



*Statikus és dinamikus hiszterézis görbe*

Relatív permeabilitás

A mágnesezési görbe minden munkapontjában számítható a $\mu = \dfrac{B}{H}$ abszolút és a $\mu_r = \dfrac{B}{\mu_0 H}$ relatív permeabilitás. Az erős nemlinearitás miatt többféle egyszerűsítést használnak:

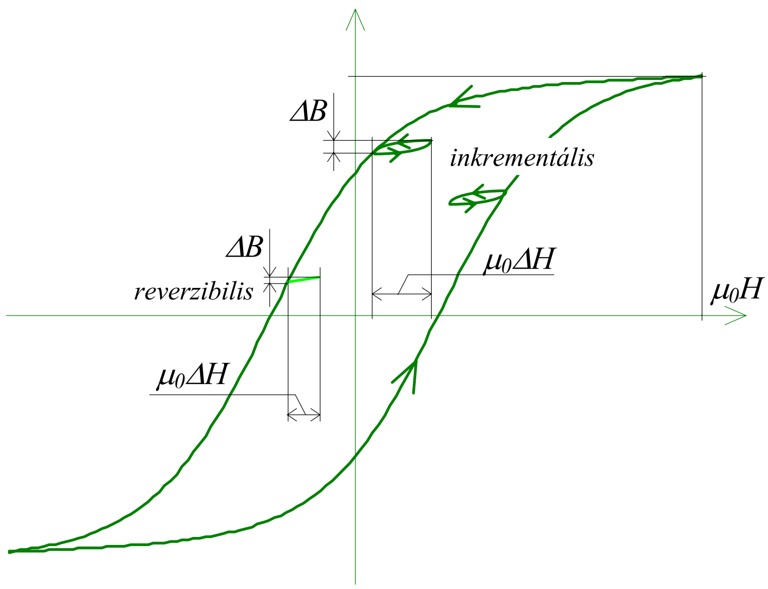
- *teljes (közönséges) permeabilitás*: az origóból az első mágnesezési görbe pontjaihoz húzott egyenes iránytangense $\mu_r = \dfrac{B}{\mu_0 H} = tg\alpha_t$. Ez a leggyakrabban használt közelítés.




*A teljes, a differenciális és a kezdeti permeabilitás értelmezése*

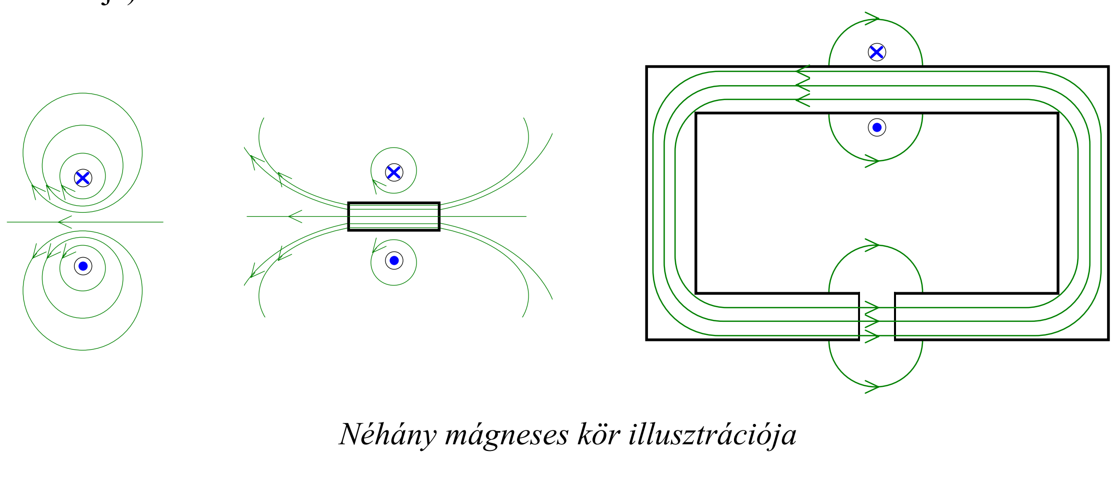
- *differenciális permeabilitás*: a mágnesezési görbe (pl. első mágnesezési görbe) munkaponti meredeksége $\mu_{rdiff} = \dfrac{dB}{\mu_0 dH} = tg\alpha_d$.

- *kezdeti permeabilitás*: az <u>első mágnesezési görbe</u> kezdeti szakaszának meredeksége $\mu_{rk}=tg\alpha_k$.
- *inkrementális permeabilitás*: adott munkapont körüli ciklikus kis változások hatására kialakuló elemi hiszterézisre jellemző érték $\mu_{rink}=\dfrac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H}$.
- *reverzibilis permeabilitás*: megegyezik az inkrementális permeabilitással, ha a munkapont körüli változás olyan kis mértékű, hogy az elemi hiszterézis egy vonallá olvad össze.




*Az inkrementális és a reverzibilis permeabilitás értelmezése*

<u>A mágneses körök számítása</u>
Mágneses kör a mágneses tér olyan zárt része (flxuscsatornája), amelyben a fluxus állandónak tekinthető, belőle indukcióvonalak nem lépnek ki. Lényegében minden zárt indukcióvonal mágneses kör. A mágneses körökben általában ferromágneses anyagok terelik az indukcióvonalakat a tér kijelölt részébe. Egyszerűen azok a körök számíthatók, amelyek fluxuscsatornája (geometriája) ismert.

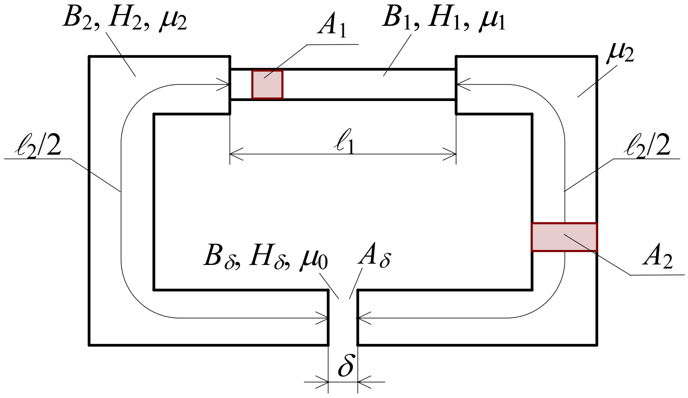


*Néhány mágneses kör illusztrációja*

A fluxus ismeretében a gerjesztés könnyen, fordítva csak bonyolultan számítható.
A szórt erővonalakat számítással vagy becsléssel veszik tekintetbe, gyakran elhanyagolják.

A mágneses körök mentén rendszerint különböző tulajdonságú (permeabilitású és geometriájú) anyagok vannak és lehetnek elágazások is.
A gerjesztési törvény időben állandó térre és lassú változások esetére érvényes, egyenáramra és váltakozó áram pillanatértékére alkalmazható. Gyorsan változó fluxusnál figyelembe kell venni az indukált feszültség hatását is.

Soros mágneses körök
A soros mágneses körök rendszerint egymást követő különböző keresztmetszetű és különböző anyagú szakaszokból állnak, az egyes szakaszokon belül a mágneses tér jellemzőit állandónak tekintik.
*Adott fluxus létrehozásához és fenntartásához szükséges gerjesztés számítása*
Legyen a vizsgált kör mentén (vagy annak egy szakaszán) a fluxus $\Phi$ adott, előírt és a szórás elhanyagolható $\Phi_s=0$.




*Soros mágneses kör vázlata*

A légrés indukciója $B_\delta = \dfrac{\Phi}{A_\delta}$, a további, homogénnek tekinthető ferromágneses szakaszok indukciója $B_1 = \dfrac{\Phi}{A_1}$, $B_2 = \dfrac{\Phi}{A_2}$ stb.

A légrés térerőssége könnyen számítható, $H_\delta = \dfrac{B_\delta}{\mu_0}$, míg a ferromágneses szakaszok $H_1$, $H_2$ stb. térerőssége vagy a $\mu_{r1}$ és a $\mu_{r2}$ stb. relatív permeabilitása rendszerint csak a mágnesezési görbéből olvasható le.

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu_{r1}} = f(B_1) \text{ és } H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_{r2}} = f(B_2).$$

A gerjesztési törvény alkalmazásával a kör eredő gerjesztése, az egyes szakaszokra jutó gerjesztések összege, $\mu_i=\mu_0\mu_{ri}$ jelöléssel:

$$\Theta = \sum_i \Theta_i = \sum_i H_i \ell_i = H_\delta \delta + H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + \ldots = \sum_i \frac{\Phi}{\mu_i A_i} \ell_i = \Phi \sum_i \frac{\ell_i}{\mu_i A_i},$$

mivel az összegezésnél $\Phi$ kiemelhető, ha állandó.
Azokban az esetekben, amikor a légrésre esik a gerjesztés legnagyobb része, a kör ferromágneses (vas) része gyakran elhanyagolható ($\mu_{vas} \gg \mu_0$, ezért $H_\delta \gg H_{vas}$).

*Példa*

Legyen $B_\delta$=$B_{vas}$=1T (a szórás elhanyagolható), $\delta$=1 mm, $\ell_{vas}$=1 m, a mágnesezési görbéből $\mu_{rvas}$=$10^6$.

A térerősség a légrésben:

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{B_\delta}{1{,}256\cdot 10^{-6}} = 0{,}8\cdot 10^6\, B_\delta = 0{,}8\cdot 10^6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}},$$

a vasban: $H_{vas} = \dfrac{B_{vas}}{\mu_0\mu_{rvas}} = \dfrac{B_\delta}{\mu_0\mu_{rvas}} = 0{,}8 B_\delta = 0{,}8\,\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$.

A teljes gerjesztés a vas és a légrés gerjesztésigényének összege: $\Theta=\Theta_{vas}+\Theta_\delta$.

A vasra jutó gerjesztés $\Theta_{vas}=H_{vas}\ell_{vas}$=0,8 A, a légrés gerjesztése $\Theta_\delta=H_\delta\ell_\delta$=800 A, a teljes gerjesztés $\Theta$=800,8 A.

Egy $N$ menetszámú tekercsnél a szükséges áram: $I = \dfrac{\Theta}{N} = \dfrac{800{,}8}{\mathrm{N}}(\mathrm{A})$.

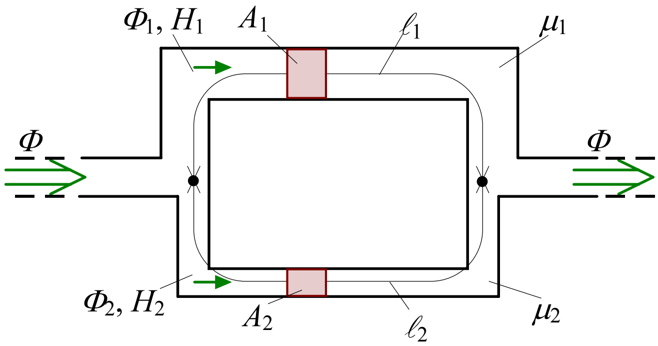
Kisebb permeabilitású vasnál nő a vas gerjesztésszükséglete és nem elhanyagolható. Pl. $\mu_{rvas}$=$10^3$-értéknél $H_{vas} = 800\,\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$, $\Theta_{vas}=H_{vas}\ell_{vas}$=800 A, így a teljes gerjesztés $\Theta$=1600 A.

Fordított feladatnál, amikor adott az $I$ áram (gerjesztés) és a kialakuló fluxus vagy az indukció a kérdés, a nehézséget az jelenti, hogy a gerjesztés eloszlása az egyes szakaszokra a permeabilitások arányától függ, aminek meghatározásához viszont a térerősség ismerete lenne szükséges. Ilyenkor egy célszerű megoldás különböző felvett fluxusértékekhez a gerjesztés vagy az áram meghatározása, felrajzolása és a $\Phi(\Theta)$ vagy $\Phi(I)$ görbéből a feladat megoldásának leolvasása vagy számítása.

Párhuzamos mágneses körök

Az indukcióvonalak zártsága miatt a teljes belépő- és a teljes kilépő fluxus azonos:

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2.$$




*Párhuzamos mágneses kör vázlata*

A gerjesztési törvényt felírva az $\ell_1 - \ell_2$ zárt hurokra

$$H_1\ell_1 - H_2\ell_2 = 0,$$

mivel feltételezzük, hogy a görbe nem fog körül áramot. Ebből

$$H_1\ell_1 = H_2\ell_2 = \Theta_p,$$

vagyis a párhuzamos szakaszokra jutó $\Theta_p$ gerjesztés azonos.

Behelyettesítve $H = \dfrac{B}{\mu} = \dfrac{\Phi}{\mu A}$ szerint:

$$\frac{\Phi_1}{\mu_1 A_1}\ell_1 = \frac{\Phi_2}{\mu_2 A_2}\ell_2 = \Theta_p\text{, amiből } \Phi_1 = \Theta_p \frac{\mu_1 A_1}{\ell_1}\text{, illetve } \Phi_2 = \Theta_p \frac{\mu_2 A_2}{\ell_2}.$$

A párhuzamos ágak a teljes $\Phi$ fluxust $\Theta_p$ gerjesztés mellett vezetik:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Theta_p\left(\frac{\mu_1 A_1}{\ell_1} + \frac{\mu_2 A_2}{\ell_2}\right) = \Theta_p \sum_i \frac{\mu_i A_i}{\ell_i}.$$

A „mágneses Ohm-törvény”

A gerjesztési törvény $\Theta = \oint \overline{H} d\overline{\ell}$ alakját módosítva – formai hasonlóságok miatt – az összetett mágneses körök egyenleteire kapott összefüggést mágneses Ohm-törvénynek is nevezik. $H = \dfrac{B}{\mu}$ és $B = \dfrac{\Phi}{A}$ helyettesítéssel a térerősség vonalmenti integráljára (a soros mágneses kör eredő gerjesztésére) kapott összefüggés

$$\Theta = \sum_i \frac{\Phi}{\mu_i A_i}\ell_i = \Phi \sum_i \frac{\ell_i}{\mu_i A_i}$$

alakja emlékeztet a véges ellenállással bíró vezető szakaszok soros eredő feszültségére felírható alábbi képletre:

$$U = \sum_i \frac{I}{\gamma_i A_i}\ell_i = I \sum_i \frac{\ell_i}{\gamma_i A_i} = I \sum_i R_i,$$

ahol $\gamma = \dfrac{1}{\rho}$ - a fajlagos vezetőképesség, a fajlagos ellenállás reciproka.

A soros mágneses kör eredő gerjesztése ennek alapján így is felírható:

$$U_m = \Phi \sum_i R_{m\,i},$$

ahol $U_m$=$\Theta$ – az eredő mágneses feszültség (gerjesztés),

$R_{m\,i} = \dfrac{\ell_i}{\mu_i A_i}$ – az $i$-dik szakasz mágneses ellenállása. A soros szakaszok eredő mágneses ellenállása: $R_m = \sum_i R_{m\,i}$, ezzel $U_m$=$\Phi R_m$.

Minél nagyobb a permeabilitás, annál kisebb a mágneses kör adott szakaszának mágneses ellenállása és azonos fluxus esetére a gerjesztés-szükséglete, mágneses feszültsége.

A soros mágneses kör egyes szakaszainak gerjesztés-szükséglete a szakasz mágneses feszültségének is nevezhető, az $i$-dik szakaszra:

$$U_{m\,i} = \Phi \frac{\ell_i}{\mu_i A_i}.$$

Ennek alapján a gerjesztési törvény úgy is fogalmazható, hogy a felületet határoló zárt görbe menti mágneses feszültségek eredője a mágneses kör gerjesztése $\Theta = \sum_i U_{mi}$.

A párhuzamos mágneses kör eredő fluxusára kapott

$$\Phi = \Theta_p \sum_i \frac{\mu_i A_i}{\ell_i}$$

összefüggés az előbbiek szerint

$$\Phi = U_{m\,p} \sum_i \Lambda_i,$$

alakban is írható, ahol $\Lambda_i = \frac{\mu_i A_i}{\ell_i} = \frac{1}{R_{m\,i}}$ – az *i*-dik szakasz mágneses vezetőképessége, a mágneses ellenállás reciproka.
A párhuzamos szakaszok eredő mágneses vezetése: $\Lambda_m = \sum_i \Lambda_{m\,i}$, amivel $\Phi = U_m \Lambda_m = \Theta \Lambda_m$.

A fenti analógia alapján felrajzolhatók a mágneses körök helyettesítő villamos áramkörei.
Az ilyen helyettesítéssel azonban nagy körültekintéssel kell bánni, mivel a hasonlóság csak formai, ugyanis a fizikai jelenségek eltérőek:
a) A villamos áram töltések valóságos áramlása, a mágneses fluxus pedig a tér, az anyag állapotát jellemzi, nem jár semmilyen részecskemozgással.
b) A villamos áram fenntartása veszteséggel jár (az állandó egyenáramé is), a fluxus fenntartásához nincs szükség energiára (létrehozásához, megváltoztatásához igen).
c) A mágneses feszültség zárt görbe menti integrálja $\oint \overline{H} d\overline{\ell}$ csak akkor zérus, ha nem fog körül áramot, a villamos feszültség zárt görbe menti integrálja $\oint \overline{E} d\overline{\ell}$ mindig zérus, ha nem fog körül változó fluxust.
d) A villamos vezetőképesség állandó hőmérsékleten rendszerint állandó, nem függ az áramtól, a ferromágneses anyagok permeabilitása viszont a fluxussal, térerősséggel stb. jelentősen változik.
e) A villamos vezető és a villamos szigetelőanyagok vezetőképessége közötti arány $10^{20}$ nagyságrendű, ezért a szigetelőben folyó szivárgási áram elhanyagolható. A mágneses vezető és a „mágneses szigetelőanyagok” esetén ez az arány $10^3$-$10^6$, ezért a szórt fluxusokat, azok hatását gyakran figyelembe kell venni.
f) A szuperpozíció ferromágneses anyagot tartalmazó (nemlineáris) körökben nem használható, általában csak a gerjesztések összegezhetők, az egyes gerjesztések által létrehozott térerősségek, vagy az indukciók nem. A lineárisnak tekinthető villamos áramkörök viszont szuperpozícióval számíthatók.

## Önindukció, önindukciós tényező

Az indukció törvény értelmében egy vezetőben vagy tekercsben $u_i(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$ indukált feszültség keletkezik. Ez arra az esetre is igaz, ha a luxusváltozást a vezetőben vagy a tekercsben magában folyó áram megváltozása idézi elő. A tekercs áramának változása a tekercsben magában indukál feszültséget: önindukció. Az indukált feszültség – Lenz törvénye szerint – gátolja az indukciót okozó folyamatot, tehát az áramváltozás ellen hat, azt akadályozza.
Az indukált feszültség általánosan, a tekercsfluxus változásából, mivel $\psi = \psi(i(t))$:

$$u_i(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\psi(t)}{di(t)} \frac{di(t)}{dt}.$$

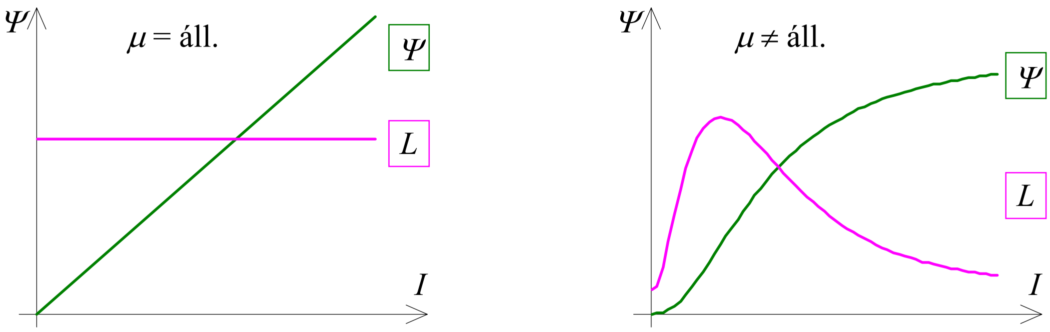
A $\psi$ tekercsfluxus és az $i$ áram közötti kapcsolatot az $L$ induktivitás vagy önindukciós tényező teremti meg $L = \frac{d\psi(t)}{di(t)}$, SI mértékegysége Henry[5] tiszteletére

$$[L] = \mathrm{H} = \mathrm{henry} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \Omega\mathrm{s}.$$

[5] Henry, Joseph (1797-1878) amerikai fizikus

Ezzel az önindukciós feszültség: $u_i(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$. Az induktivitás segítségével a mágneses tér állapotváltozását egy villamos áramkör áramváltozására vezetjük vissza.
(Az indukált feszültség hatására zárt áramkörben létrejövő áramot szokták indukált áramnak is nevezni.)

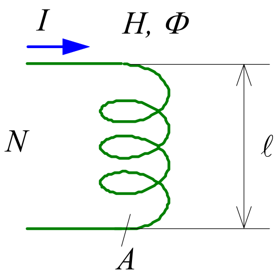
Nem ferromágneses közegben a $\psi(i)$ összefüggés lineáris, így $L = \dfrac{\psi(t)}{i(t)} = \dfrac{\Psi}{I} = \text{áll.}$, ferromágneses közegben $\psi(i) \neq$áll., ezért $L(i) \neq$áll.




*Az induktivitás áramfüggése, ha a Ψ(I) mágnesezési görbe*
*lineáris* *nemlineáris*

<u>Vasmentes</u> szolenoid homogén terére a <u>gerjesztési törvény</u> (mivel a tekercsen kívüli tér elhanyagolható és így az erővonalak teljes hossza helyett csak a tekercs hosszát kell figyelembe venni):

$$NI = H\ell = \frac{\Phi}{\mu_0 A}\ell = \frac{N\Phi}{N\mu_0 A}\ell = \frac{\Psi}{N\mu_0 A}\ell \text{, amiből } L = \frac{\Psi}{I} = N^2\mu_0\frac{A}{\ell} = N^2\Lambda .$$

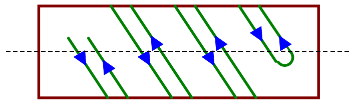



*A szolenoid induktivitásának közelítő számítása*

Az induktivitás a tekercs menetszámától, geometriájától és a kitöltő közeg anyagától függ, <u>ferromágneses közegben áramfüggő</u>.
<u>$N^2$ értelmezése:</u> egyrészt az egyes menetekben folyó áramok a gerjesztési törvény szerint mágneseznek, mágneses teret hoznak létre, másrészt bennük az indukció törvény alapján feszültség indukálódik.
Az induktivitás $L = \dfrac{d\psi}{di}$ változása a mágnesezési görbe alapján meghatározható.

<u>Induktivitás-szegény</u> áramköri elemet (pl. dobra tekercselt huzalból készült ellenállást) ún. bifiláris (filum = szál, fonál) kialakítással lehet előállítani. Ennél a megoldásnál tulajdonképpen két tekercs van szorosan egymás mellett: egy jobb- és egy balmenetű. Az ellentétes

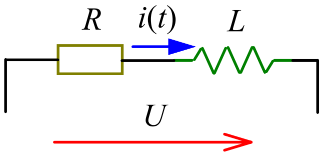
irányban gerjesztett fluxus miatt a két tekercs lerontja egymás mágneses terét. Az eredő kis (ideális esetben zérus) fluxusnak megfelelően $\Psi$ kicsi (így az önindukciós feszültség is kicsi), tehát az induktivitás is kicsi.



*Induktivitás-szegény tekercselés vázlata*

A mágneses tér energiája

Egy koncentrált paraméterű $R$ ellenállással és $L$ induktivitással jellemzett tekercs $U$=áll. feszültségre kapcsolásakor az $U = u_R(t) + u_L(t) = u_R(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} = i(t)R + \dfrac{d\psi(t)}{dt}$ feszültség egyenlet érvényes.



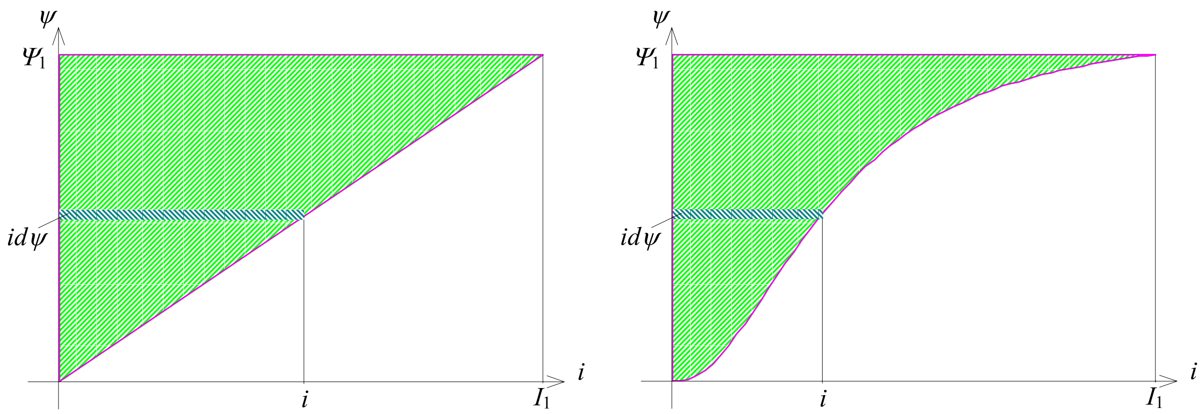

*Koncentrált paraméterű tekercs*

A tekercs által $dt$ idő alatt felvett energia: $dw = dw_R + dw_m = Ui(t)dt = i^2(t)Rdt + i(t)d\psi(t)$.
Az $i^2(t)Rdt$ energia a tekercs ellenállásán hővé alakul, $i(t)d\psi(t)$ energia pedig felhalmozódik a mágneses térben és az áram csökkenésekor – a tér leépülésekor – visszanyerhető.
Ha egy bekapcsolási folyamat alatt a $\psi(t)$ fluxus 0-ról $\Psi_1$ értékre nő (az $i(t)$ áram 0-ról $I_1$-re), akkor a mágneses térben felhalmozódó teljes $W_{m1}$ energia:

$$W_{m1} = \int_0^{\Psi_1} i(t)d\psi .$$

Lineáris $\psi(i)$ kapcsolat (pl. vasmentes tekercs) esetén $L$=áll., $\Psi_1 = LI_1$ és $d\psi = Ldi$, így az integrál egyszerűsíthető:

$$W_{m1} = \int_0^{\Psi_1} i(t)d\psi = L\int_0^{I_1} i(t)di = \frac{1}{2}LI_1^2 = \frac{1}{2}\Psi_1 I_1 = \frac{1}{2}\frac{\Psi_1^2}{L}.$$




*Egy tekercsben felhalmozott energia*
*nem ferromágneses* *ferromágneses*

A tekercsben felhalmozott mágneses energia a <u>tekercsfluxusból</u> és az áramból számítható, <u>azonos áramnál</u> az induktivitással arányos.
Ferromágneses anyagot tartalmazó körben a $\psi(i)$ kapcsolat nemlineáris (pl. vasmagos tekercsnél) $L\neq$áll., ezért az integrálás nem egyszerűsíthető.
Egy tekercset a tápforrásról lekapcsolva a tárolt energiát visszakapjuk, a fluxuscsökkenés hatására keletkező önindukciós feszültség ugyanis az áram fenntartására törekszik. Ez az induktív áramkörök megszakításakor is igaz, ezért az ilyen művelet különös figyelmet és körültekintést igényel.
<u>Homogén, lineáris</u> esetben ($\mu$=áll. esetén) a mágneses energia egyszerűen kifejezhető a térjellemzőkkel is.
A $\psi=N\Phi=NBA$ és a $\Theta=NI=H\ell$ összefüggések felhasználásával

$$W=\frac{1}{2}\Psi I=\frac{1}{2}NBA\frac{H\ell}{N}=\frac{1}{2}VHB,$$

ahol $V=A\ell$ – a vizsgált térfogat.
A térfogategységben tárolt energia (energiasűrűség):

$$w=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}HB=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}.$$

<u>Homogén, nemlineáris</u> térben ($\mu\neq$áll. esetén, pl. toroid vasban)

$$W=\int_0^{\psi_1} i(t)d\psi=\int_0^{\psi_1}\frac{H\ell}{N}d\psi=\int_0^{\Phi_1}\frac{H\ell}{N}Nd\Phi=\int_0^{B_1}A\ell HdB=V\int_0^{B_1}HdB.$$

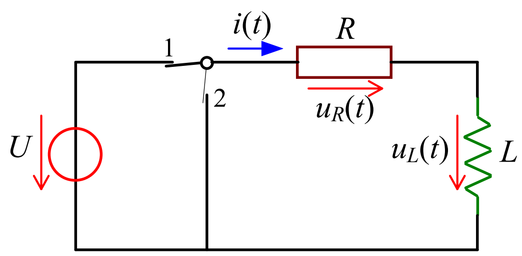
A térfogategységben tárolt energia:

$$w=\int_0^{B_1}HdB.$$

Ez az összefüggés az inhomogén tér egyes pontjaira is igaz, így általános esetben, adott térfogatra:

$$W=\int_V\int_B HdBdV.$$

<u>Példa</u>
Az induktivitás hatása (tekercset tartalmazó) egyenáramú áramkör be- és kikapcsolása során.
*a) bekapcsolás*




*Egyenáramú R-L áramkör be- és kikapcsolása*

Az ábrán látható $R$-$L$ áramkör ugrásszerű $U$ feszültségre kapcsolása (a kapcsoló 1-es állása) következtében megindul az áram és a mágneses energia felhalmozódása az induktivitásban. Ez a folyamat az áram állandósult $I=\frac{U}{R}$ értékének eléréséig tart. Ekkor az $L$ induktivitásban tárolt energia nagysága: $W_L = \dfrac{LI^2}{2}$. Az áram növekedése során az induktivitáson indukáló-dó $L\dfrac{di}{dt}$ nagyságú (önindukciós) feszültség – Lenz törvénye szerint – késlelteti az áram kialakulását. A huroktörvény értelmében az $U$ kapocsfeszültséggel minden pillanatban az ohmos feszültségesés és az indukált feszültség összege tart egyensúlyt:

$$U = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt}.$$

Az egyenletet átrendezve:

$$\frac{U}{R} = i(t) + \frac{L}{R}\frac{di(t)}{dt},$$

ahol $\dfrac{U}{R} = I$ - az áram állandósult értéke, $\dfrac{L}{R} = T$ - az $R$-$L$ kör időállandója. Ezekkel az egyenlet:

$$I = i(t) + T\frac{di(t)}{dt}.$$

A változók szétválasztásával, figyelembe véve, hogy $di=-d(I-i)$:

$$\frac{dt}{T} = -\frac{d(I-i)}{I-i}.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$-\frac{t}{T} = ln(I-i) + C.$$

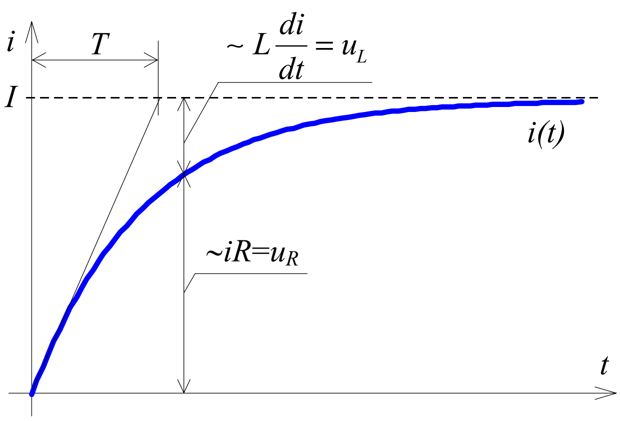
A kezdeti feltétel árammentes bekapcsolás esetén: $i(t=0)=0$, amiből $C=-ln(I)$. Ezzel:

$-\dfrac{t}{T} = ln(I-i) - ln\, I = ln\dfrac{I-i}{I}$, amiből $e^{-\frac{t}{T}} = \dfrac{I-i(t)}{I}$.

Az áram változásának időfüggvénye:

$$i(t) = I\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right) = \frac{U}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

vagyis az áram exponenciális függvény szerint éri el az állandósult $I = \dfrac{U}{R}$ értéket.




*R-L áramkör bekapcsolási árama*

A bekapcsolási folyamat alatt az ellenálláson lévő feszültség arányos az árammal, az induktivitáson megjelenő feszültség pedig az áram változásával (deriváltjával):

$$u_R(t) = i(t)R = U\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \qquad \text{és} \qquad u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{U}{R}\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} = Ue^{-\frac{t}{T}}.$$

*b) kikapcsolás*

Az ábra kapcsolóját 2-es állásába képzelve az áramkör tápfeszültsége ugrásszerűen zérussá válik, a csökkenő áramot – Lenz törvénye szerint – az induktivitásban tárolt energia igyekszik fenntartani. Végül ez az energia az ellenálláson disszipálódik (hővé alakul). Az áram csökkenése miatt az induktivitáson $u_L(t) = -L\frac{di}{dt}$ nagyságú önindukciós feszültség indukálódik, amivel – a huroktörvény értelmében – az ohmos feszültségesés tart egyensúlyt:

$$0 = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt}, \qquad \text{vagy} \qquad 0 = i(t) + T\frac{di(t)}{dt}.$$

A változók szétválasztásával:

$$-\frac{dt}{T} = \frac{di}{i}.$$

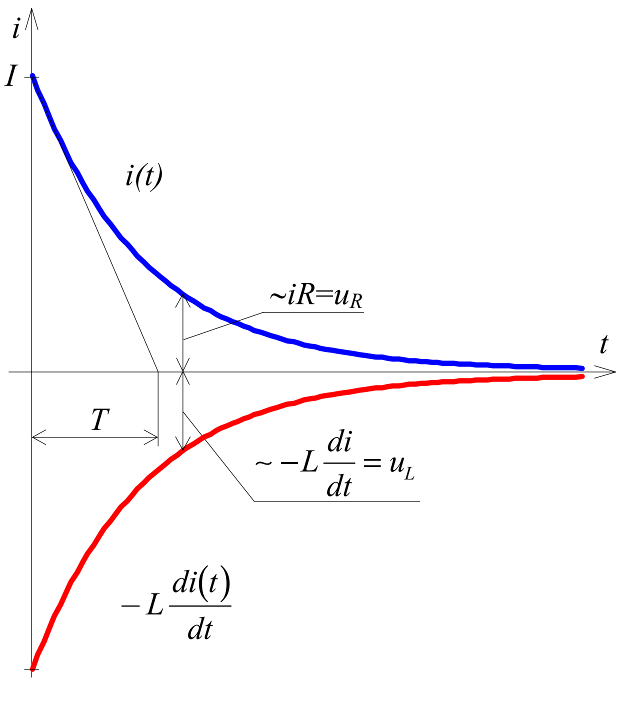
Mindkét oldalt integrálva:

$$-\frac{t}{T} = ln(I) + C.$$

A kezdeti feltétel állandósult állapoti kikapcsolás esetén: $i(t{=}0){=}I$, amiből $C{=}-lnI$. Ezzel:

$$-\frac{t}{T} = ln\frac{i}{I},$$

amiből $e^{-\frac{t}{T}} = \frac{i(t)}{I}$.



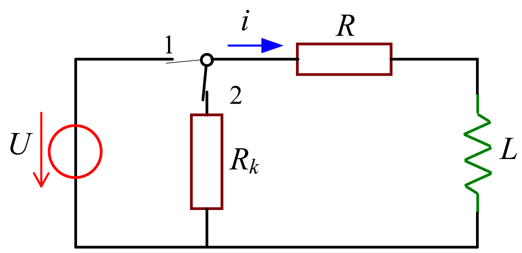

*R-L áramkör kikapcsolási árama*

Az áram változásának időfüggvénye: $i(t) = Ie^{-\frac{t}{T}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$,

az áram exponenciális függvény szerint éri el az állandósult $I$=0 értéket.
A kikapcsolási folyamat alatt az ellenálláson lévő $u_R(t)$ feszültség arányos az árammal, az induktivitáson megjelenő $u_L(t)$ feszültség pedig az áram változásával:

$$u_R(t) = i(t)R = Ue^{-\frac{t}{T}} \qquad \text{és} \qquad u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -L\frac{U}{R}\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} = -Ue^{-\frac{t}{T}}.$$

Nézzük meg az átmeneti folyamatot akkor, amikor az R-L áramkört egy külső $R_k$ ellenállásra kapcsoljuk az ábra szerint.
Ebben az esetben a kikapcsolt kör időállandója $T' = \frac{L}{R+R_k}$ kisebb, vagyis az eredeti $T = \frac{L}{R}$ időállandónál kisebb, annak $\frac{R}{R+R_k}$ -szerese: $T' = \frac{R}{R+R_k}T$.




*R-L áramkör kikapcsolása külső ellenállással*

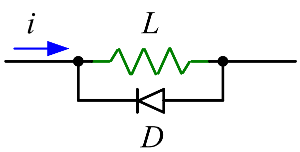
Az áram változásának időfüggvénye:

$$i(t) = Ie^{-\frac{t}{T'}} = \frac{U}{R}e^{-\frac{R+R_k}{L}t},$$

amiből az induktivitáson megjelenő feszültség:

$$u_L(t) = -L\frac{di(t)}{dt} = -L\frac{U}{R}\frac{1}{T'}e^{-\frac{t}{T'}} = -U\frac{R+R_k}{R}e^{-\frac{t}{T'}},$$

nagyobb a külső ellenállás nélküli esetnél. Fizikailag ez úgy értelmezhető, hogy az erőteljesebb áramcsökkenés ($T' < T$) miatt nagyobb az indukálódó feszültség.
Például, $R_k$=$R$ esetén a kikapcsolás utáni pillanatban az eredeti tápfeszültség kétszerese lép fel az induktivitáson. Az $R_k$ ellenállás növelésével az induktivitáson megjelenő feszültség nő, az áramkör megszakításakor elvileg végtelen nagy lehet. Ez azonban nem fordul elő, mivel az átütési szilárdság elérése után az áramkör szikra vagy ív formájában záródik. Áramjárta induktív áramkör megszakítása a fentiek szerint veszélyes lehet, balesetet és anyagi kárt okozhat. Vonatkozik ez egy áramkör félvezető kapcsolóval történő kikapcsolására is, amikor fennáll a félvezető réteg átütésének veszélye.
Az induktivitáson fellépő kikapcsolási feszültség káros következménye ellen gyakran az induktivitásra kapcsolt ellenpárhuzamos diódával védekeznek:



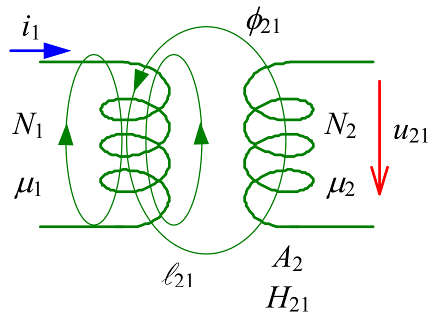

*Diódás védőkapcsolás*

ebben az elrendezésben az induktivitás által fenntartott áram a diódán keresztül záródik, a tárolt energia pedig az induktivitás – nem ábrázolt – ohmos ellenállásán, a vezető ellenállásán vagy valamilyen külső ellenálláson disszipálódik.

A kölcsönös indukció

Ha két tekercs egymás közelében helyezkedik el, akkor az első árama által létrehozott mágneses tér (fluxus) egy része a második tekerccsel is kapcsolódik. Az ilyen elrendezést csatolt tekercspárnak nevezik. Az első (primer) tekercs $i_1(t)$ áramának megváltozásakor a második (szekunder) tekercs vezetőivel kapcsolódó $\phi_{21}(i_1(t))$ fluxus megváltozása feszültséget indukál. A nyitott szekunder tekercsben indukált feszültség:

$$u_{21}(t) = \frac{d\psi_{21}(i_1(t))}{dt} = \frac{d\psi_{21}(t)}{di_1}\frac{di_1(t)}{dt}.$$




*Csatolt tekercsek*

A $\frac{d\psi_{21}}{di_1}$ deriváltat kölcsönös indukciós tényezőnek vagy kölcsönös induktivitásnak nevezik, jelölése: $M_{21}$ vagy $L_{21}$, SI mértékegysége egyezik az önindukciós tényező mértékegységével: [M]=H (henry). A kölcsönös indukciós tényező a két tekercs kialakításától, egymáshoz képesti elhelyezkedésétől és a kitöltő közeg anyagától függ. Állandó permeabilitás esetén (pl. vasmentes közegben), állandósult állapotban a kölcsönös induktivitás állandó $M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$. A gerjesztési törvényt alkalmazva a $\phi_{21}$ által kijelölt fluxuscsatornára, egyszerűsítve:

$$\Theta_1 = N_1 i_1 = H_{21}\ell_{21} = \frac{\Phi_{21}}{A_2\mu_2}\ell_{21} = \Phi_{21}R_{m21}$$

$$\phi_{21} = N_1 i_1 \Lambda_{21}$$

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{N_2\phi_{21}}{i_1} = N_1 N_2 \Lambda_{21}.$$

Azért a két tekercs menetszámának szorzata szerepel $M_{21}$ képletében, mert $N_1$ menetek mágneseznek, a feszültség pedig $N_2$-ben indukálódik. A kapcsolat fordítva is fennáll, a második tekercs gerjesztésekor az elsőben indukálódik feszültség.
Izotrop közegben $M_{12}=M_{21}$, mivel $\Lambda_{12}=\Lambda_{21}$.

Csatolt tekercsek fluxusának felbontása összetevőkre

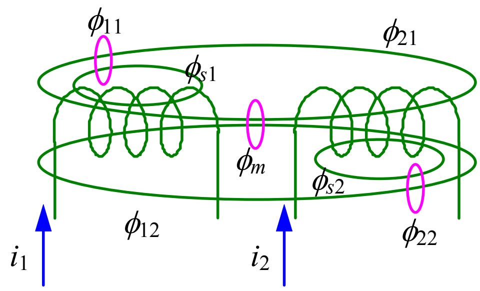
Csatolt tekercsekről akkor beszélünk, ha az egyes tekercsek egymás mágneses terében helyezkednek el, és ha egymás terének hatása nem elhanyagolható. Alkalmazástól függően lehet

cél a minél jobb csatolás (pl. energia- vagy jelátvitelnél), illetve a csatolás elkerülése (pl. elektromágneses zavarcsökkentés érdekében).
A következőkben a kettős index első tagja jelöli azt a tekercset, amelyikre a második taggal jelölt tekercs árama által létrehozott mágneses tér hatást fejt ki.
Az egyetlen valóságos (eredő) mágneses tér a rendszer geometriai kialakításától függően különböző mértékben kapcsolódhat az egyes tekercsekkel. A szemléltetés és az egyszerűbb tárgyalás érdekében a teret reprezentáló fluxus 4 összetevőre bontható:
- az $i_1$ áram által az 1. tekercsben létrehozott $\phi_{11}$ fluxus egy része kapcsolódik a 2. tekerccsel is ($\phi_{21}$), másik része – az első tekercs szórt fluxusa – csak az 1-el ($\phi_{s1}$),

$$\phi_{11}=\phi_{21}+\phi_{s1}.$$

- az $i_2$ áram által a 2. tekercsben létrehozott $\phi_{22}$ fluxus egy része kapcsolódik az 1. tekerccsel is ($\phi_{12}$), másik része – a második tekercs szórt fluxusa – csak a 2.-al ($\phi_{s2}$),

$$\phi_{22}=\phi_{12}+\phi_{s2}.$$




*A fluxus felbontása összetevőkre*

A két áram ($i_1$ és $i_2$) által létrehozott fluxus komponensek eredője:

$$\phi=\phi_{11}+\phi_{22}=\phi_{21}+\phi_{s1}+\phi_{12}+\phi_{s2}=\phi_m+\phi_{s1}+\phi_{s2}.$$

Ezeket a komponenseket kétféle módon szokták csoportosítani.
A csatolt körös elmélet „eredet” szerint választja szét az összetevőket, az egyes tekercsekkel kapcsolódó eredő a teljes „saját” fluxus és a másik tekercs csatlakozó fluxusának összege:
az 1. tekerccsel kapcsolódó $\phi_1$ összes fluxus

$$\phi_1=\phi_{11}+\phi_{12}=\phi_{21}+\phi_{s1}+\phi_{12},$$

a 2. tekerccsel kapcsolódó $\phi_2$ összes fluxus

$$\phi_2=\phi_{22}+\phi_{21}=\phi_{12}+\phi_{s2}+\phi_{21}.$$

A térelmélet „funkció” szerint választja szét az összetevőket, az egyes tekercsekkel kapcsolódó eredő a közös $\phi_m$ (hasznos, fő) fluxus és a saját szórt fluxus összege:
az 1. tekerccsel kapcsolódó összes fluxus

$$\phi_1=\phi_m+\phi_{s1}=\phi_{21}+\phi_{12}+\phi_{s1},$$

a 2. tekerccsel kapcsolódó összes fluxus

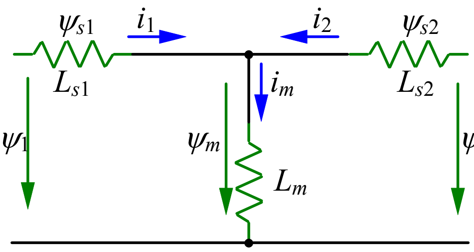
$$\phi_2=\phi_m+\phi_{s2}=\phi_{12}+\phi_{21}+\phi_{s2}.$$

Az eredő természetesen mindkét értelmezés szerint azonos.
$\phi_m$-nek két összetevője van: $\phi_{m1}=\phi_{21}$ és $\phi_{m2}=\phi_{12}$, így $\phi_m=\phi_{m1}+\phi_{m2}=\phi_{21}+\phi_{12}$.
A mágneses kölcsönhatás mértékét a csatolási tényező fejezi ki, ami úgy értelmezhető, hogy az $i_1$ áram által az 1. tekercsben létrehozott fluxus mekkora része kapcsolódik a 2. tekerccsel $k_1=\dfrac{\phi_{21}}{\phi_{11}}$, illetve fordítva, az $i_2$ áram által a 2. tekercsben létrehozott fluxus mekkora része kapcsolódik az 1. tekerccsel $k_2=\dfrac{\phi_{12}}{\phi_{22}}$.
A szórási tényező a csatolásban nem részes komponens arányát fejezi ki.

A szórási és a csatolási tényezők kapcsolata:

$$\sigma_1 = \frac{\phi_{s1}}{\phi_{11}} = \frac{\phi_{11} - \phi_{21}}{\phi_{11}} = 1 - \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = 1 - k_1 \text{ és } \sigma_2 = \frac{\phi_{s2}}{\phi_{22}} = \frac{\phi_{22} - \phi_{12}}{\phi_{22}} = 1 - \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = 1 - k_2 .$$

A villamos gépeket (pl. a transzformátorokat, aszinkron motorokat) rendszerint térelméleti megközelítéssel tárgyalják, ennek felel meg a fluxusokra vonatkozó helyettesítő áramkör is. A modellben az egyes fluxusösszetevőket az áramok egy-egy induktivitáson hozzák létre:




*A térelméleti felbontást tükröző helyettesítő áramkör*

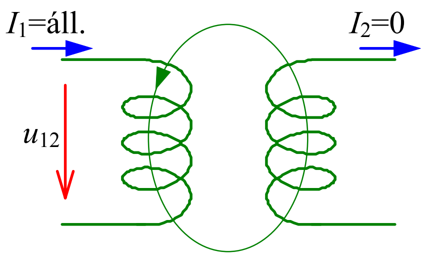
Csatolt körök mágneses energiája

Legyen az első tekercs árama $I_1$ állandó, a második pedig árammentes. Ebben az esetben az első tekercsben felhalmozott mágneses energia:

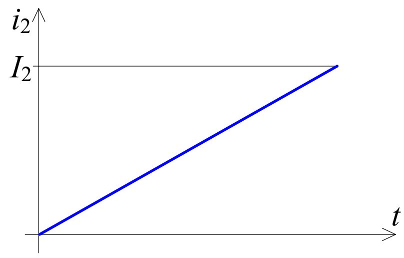
$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 .$$

A második tekercs $i_2(t)$ áramát nulláról $I_2$-re növelve – a $\psi_{12}$ fluxus kialakulása és változása miatt – az első tekercsben feszültség indukálódik, amelynek nagysága a $\frac{di_2}{dt}$ áramváltozástól függ:

$$u_{i12} = \frac{d\psi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt} .$$




*Kiindulási állapot*




*A második tekercs áramának növelése*

Amennyiben $i_2$ változása során a tekercsek azonos irányban mágneseznek ($\psi_{1eredő}=\psi_1+d\psi_{12}$), akkor az indukálódó $u_{i12}$ feszültség – Lenz törvénye értelmében – $I_1$-et csökkentené (hogy az 1. tekerccsel kapcsolódó eredő fluxus változatlan maradjon). $I_1$ állandó értéken tartásához $i_2(t)$ változásától függő $dw=u_{i12}I_1dt=M_{12}I_1di_2$ energia-bevitelre van szükség az 1. tekercset tápláló forrásból.

Az $i_2(t)$ teljes változási ideje alatt szükséges többlet energia:

$$W = \int_0^{I_2} M_{12} I_1 di_2 = M_{12} I_1 I_2 .$$

A második tekercs terének felépítése során a 2. tekercsben felhalmozott energia: $W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$.

A két tekercs együttes energiája tehát:

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 .$$

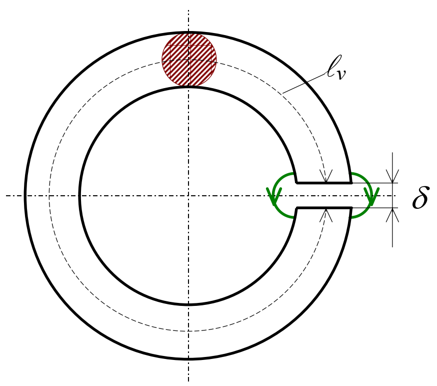
A bekapcsolás sorrendjétől a teljes felhalmozott energia általában nem függ, fordított sorrend esetén, a második tekercs után az első feszültségre kapcsolásakor

$$W = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_2 I_1 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 .$$

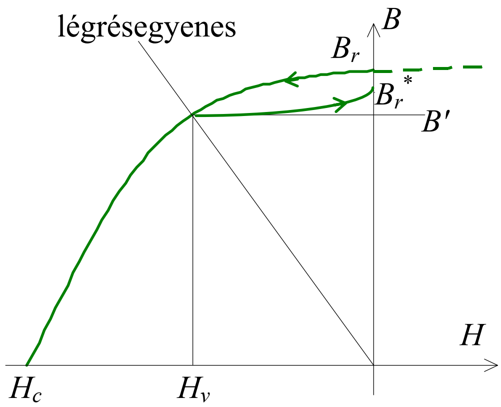
A csatolás miatti tag előjele attól függ, hogy a két áram egymás mágneses hatását erősíti vagy rontja, így $M I_1 I_2 \lessgtr 0$.

Állandó mágnesek

Az állandó mágnesek olyan anyagok, amelyek mágneses tere egyszeri felmágnesezés után gerjesztés nélkül is tartósan megmarad, ami csak erős lemágnesező hatással szüntethető meg. Ezeket az anyagokat kemény mágneseknek is nevezik, a könnyen átmágnesezhető lágy mágnesektől eltérő tulajdonságaik kifejezésére.
Egy zárt vasgyűrűben a telítési indukcióig történő mágnesezését követően, a gerjesztés megszűnte után $B_r$ remanens indukció marad fenn. Mivel a $\Theta$ gerjesztés zérus, a gerjesztési törvény értelmében a vas $H_v$ térerőssége is zérus, így a $W_m$ tárolt mágneses energia is az.




*Gyűrű alakú állandó mágnes*




*Állandó mágnes $B_v$-$H_v$ görbéje*

A gyűrűbe „légrést nyitva” a gerjesztési törvény szerint $H_v \ell_v + H_\delta \delta = 0$ (mivel továbbra sincs gerjesztés), amiből a vas megváltozott térerőssége:

$$H_v = -H_\delta \frac{\delta}{\ell_v} = -\frac{B_\delta \delta}{\mu_0 \ell_v} ,$$

itt $\ell_v$ – a közepes erővonalhossz a vasban.
Tehát negatív előjelű, lemágnesező térerősség alakul ki a vasban, az indukció pedig a mágnesezési görbe szerint $B'$ értékre csökken.
Ha a szórás elhanyagolható, $\Phi_s = 0$, akkor a fluxus a vasban és a légrésben megegyezik, $\Phi_v = \Phi_\delta$ vagy $B_v A_v = B_\delta A_\delta$, amiből $B_\delta = B_v \dfrac{A_v}{A_\delta}$.

$B_\delta$ kifejezését a gerjesztési törvény előző összefüggésébe helyettesítve:

$$H_v = -\frac{1}{\mu_0} \frac{A_v}{A_\delta} \frac{\delta}{\ell_v} B_v = -a B_v ,$$

vagyis a légrés méretétől függő lineáris kapcsolatot kapunk az állandó mágnes térerőssége és indukciója között (légrésegyenes).

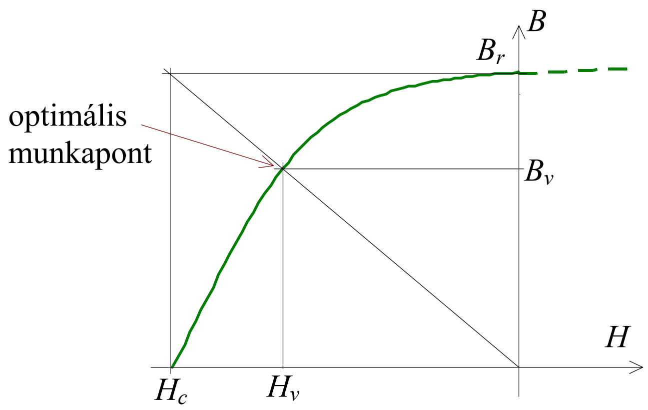
Ha a légrés <u>szórása nem elhanyagolható</u>, akkor a légrés fluxusa kisebb, mint a vasé. $\sigma = \dfrac{\Phi_s}{\Phi_v}$ értelmezéssel:

$$\Phi_\delta = \Phi_v - \Phi_s = \Phi_v - \sigma\Phi_v = (1-\sigma)\,\Phi_v.$$

Ebből $B_\delta = B_v \dfrac{(1-\sigma)A_v}{A_\delta}$ és $H_v = -\dfrac{1-\sigma}{\mu_0}\dfrac{A_v}{A_\delta}\dfrac{\delta}{\ell_v}B_v = -(1-\sigma)aB_v$.

Az állandó mágnes munkadiagramja a $B_v(H_v)$ mágnesezési görbe leszálló ága, amiből a munkapontot a légrésegyenes kimetszi (mágnesezési görbe + gerjesztési törvény). A légrés használatos mérete az alkalmazástól függ.
A mágnes minőségének egyik jellemzője az, hogy a légrés megszüntetése, a $H_v$ térerősség ismételt zérusra csökkentése után kialakuló $B_r^*$ indukció kisebb-e és milyen mértékben a kezdeti $B_r$-nél.

<u>Kemény mágnesek optimális kihasználása</u>
Az állandó mágneseket tartalmazó mágneses körök rendszerint lágy mágnesből készült szakaszokat és légrést is tartalmaznak. A kemény mágnes anyagok magas ára indokolja a minél kisebb mennyiség felhasználását.
Az állandó mágnesek <u>munkatartománya</u> rendszerint a $B_v$-$H_v$ görbe lineáris, <u>telítési szakaszára</u> esik, ezért számításoknál relatív permeabilitását $\mu_r$=1-nek vagy közel 1-nek veszik.




*Az optimális munkapont grafikus meghatározása*

A szórás és a lágyvas szakaszok mágneses feszültségének (gerjesztésének) elhanyagolásával

$$H_\delta\delta = -H_v\ell_v \text{ és } \Phi_\delta = \Phi_v = B_vA_v,$$

a <u>$v$ index itt a kemény mágnesre vonatkozik</u>.

Az állandó mágnes anyag térfogata, ha $A_v = \dfrac{\Phi_v}{B_v} = \dfrac{\Phi_\delta}{B_v}$:

$$V_v = \ell_v A_v = \frac{H_\delta\delta}{H_v}\frac{\Phi_\delta}{B_v} = \Phi_\delta^2 \frac{\delta}{\mu_0 A_\delta}\frac{1}{H_vB_v}.$$

Adott légrés méret és légrés fluxus esetén a szükséges kemény mágnes térfogata akkor a legkisebb, ha a $H_vB_v$ szorzat (jósági szorzat, energia szorzat) a legnagyobb:

$$V_{v\,min} = c\frac{1}{(H_vB_v)_{max}}.$$

$(H_vB_v)_{max}$ közelítően grafikus úton határozható meg.

Permanens mágnes ötvözetek
Különböző összetételű Al-Ni-Co acél ötvözetek,
Ag-Mn-Al nem ferromágneses anyagok ötvözete,
W-acél, Fe-Co-V, Fe-Ni-Cu, Fe-Pt, Co-Pt, $Sm_2$-$Co_{17}$, Nd-Fe-B

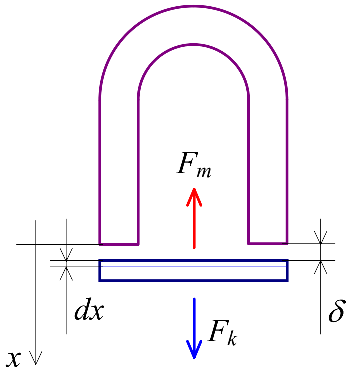
Az állandó mágnes erőhatása
Zárt (légrésmentes) mágnes energiája (munkavégző képessége) zérus, mivel $H$=0.
Légrésnyitás után $H$≠0, a befektetett mechanikai energia tárolt mágneses energiává és veszteséggé alakul. Változásokra:

$$dW_{mech}=dW_{mágn}+dW_{veszt},$$

ahol $dW_{mech}$ – a bevitt mechanikai energia, $dW_{mágn}$ – a mágneses energia, $dW_{veszt}$ – a veszteségi energia megváltozása.
Ha a veszteség és a szórás elhanyagolható, akkor $dW_{veszt}=0$, $\Phi_\delta=\Phi_v=\Phi$,
itt $\Phi_\delta$ – a légrés, $\Phi_v$ – a vas fluxusa.
A mechanikai energia megváltozása $dx$ elmozdulás során:

$$dW_{mech}=F_k dx=-F_m dx,$$

itt $F_k$ – a külső erőhatás, $F_m$ – a mágnes által kifejtett húzóerő.
A negatív előjel azt jelenti, hogy $x$ felvett (+) iránya mellett $F_m$ hatására $dx$ csökken.
$F_m$ nagysága a virtuális munkavégzés alapján számítható.




*A mágneses erőhatás számítása*

A virtuális munka elve
Anyagi rendszer akkor van egyensúlyban, ha a rá ható erők eredője zérus. Ez az erőegyensúly meghatározható a virtuális munka számításával.
Virtuális munka: a rendszerre ható valóságos erőknek ($F_k$, $F_m$) egy virtuális (lehetséges) $dx$ elmozdulás során végzett munkája.
A valóságos erők egyensúlyának az a feltétele, hogy az eredő virtuális munka zérus legyen. Vagyis, egy valóságos, működő erőknek kitett rendszer akkor, és csakis akkor van egyensúlyban, ha a valóságos erők által végzett eredő virtuális munka zérus: $F_k dx+F_m dx=0$.
Ha egy valóságos erő nem ismert, de a vele egyensúlyt tartó másik erő által végzett munkát energiaváltozásból – ami megegyezik az ismeretlen erő által végzett munkával – számítani tudjuk, akkor az ismeretlen erő – jelen esetben $F_m$ – meghatározható.

A tárolt $dW_{mágn}$ mágneses energia a vasban ($dW_{vas}$) és a légrésben ($dW_\delta$) halmozódik fel:

$$dW_{mágn}= dW_{vas}+ dW_\delta.$$

A vasban felhalmozott teljes energia $W_{vas}=V_{vas}\int\limits_{B_{vas}} H_{vas}dB_{vas}$ , így annak megváltozása

$$dW_{vas}=V_{vas}H_{vas}dB_{vas}=\ell_{vas}A_{vas}H_{vas}dB_{vas}=\ell_{vas}H_{vas}d\Phi,$$

mivel $V_{vas}=A_{vas}\ell_{vas}$.

A légrésben felhalmozott teljes energia $W_\delta=\frac{1}{2}V_\delta H_\delta B_\delta=\frac{1}{2}V_\delta\frac{B_\delta^2}{\mu_0}$. A zárólemez $dx$ mértékű elmozdulása következtében a légrés mérete (térfogata) is és az indukció is változik, ezért

$$dW_\delta=\frac{\partial W_\delta}{\partial V_\delta}dV_\delta+\frac{\partial W_\delta}{\partial B_\delta}dB_\delta .$$

A légrés térfogata és annak megváltozása: $V_\delta=2A_\delta\delta$, $dV_\delta=2A_\delta dx$, így

$$dW_\delta=\frac{1}{2}\frac{B_\delta^2}{\mu_0}2A_\delta dx+\frac{1}{2}V_\delta\frac{2B_\delta}{\mu_0}dB_\delta=\frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta dx+V_\delta H_\delta dB_\delta=\frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta dx+2\delta\, H_\delta d\Phi\ .$$

Ezekkel az energiaegyenlet:

$$F_k dx=\ell_{vas}H_{vas}d\Phi+\frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta dx+2\delta\, H_\delta d\Phi=\left(\ell_{vas}H_{vas}+2\delta\, H_\delta\right)d\Phi+\frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta dx .$$

Mivel a gerjesztési törvény szerint $\ell_{vas}H_{vas}+2\delta H_\delta=0$, statikus állapotban a mágnes által kifejtett erő:

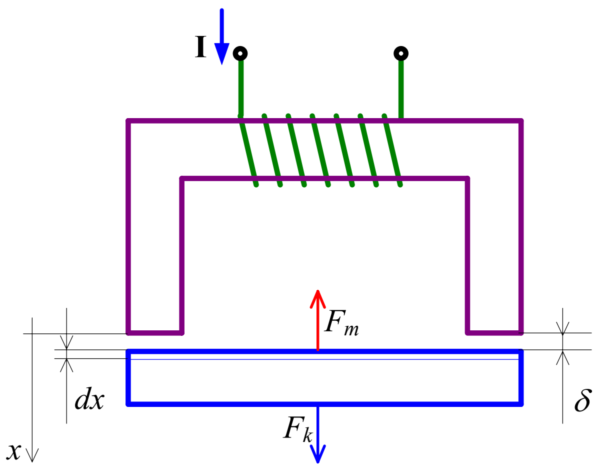
$$F_m=-\frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta .$$

<u>Az elektromágnes erőhatása</u>

Az energia megmaradás elve értelmében a külső forrásból felvett villamos energia változás és a (külső) mechanikai munka változás összege megegyezik a veszteségek és a tárolt mágneses energia változásának összegével:

$$dW_{vill}+dW_{mech}=dW_{mágn}+dW_{veszt}.$$

A veszteségi energia főleg a tekercs ohmos vesztesége. Amennyiben az $I$ áram állandó, úgy a $P=I^2R$ veszteségi teljesítmény is állandó, vagyis $dW_{veszt}$ közel zérus.




*Az elektromágneses erőhatásának számítása*

Változatlan gerjesztés mellett $\left(\Theta=\sum_i H_i\ell_i=\text{áll.}\right)$ a légrés növekedésekor a fluxusnak csökkenni, csökkenésekor növekedni kell. A fluxusváltozás miatt keletkező $u_i$ indukált feszültség viszont a tekercs $I$ áramával olyan $dW_{vill}$ (villamos) energiát jelent, amelyik (Lenz törvénye értelmében) a változás ellen hat

$$dW_{vill} = u_i I dt = N\frac{d\phi}{dt} I dt = NId\phi\,.$$

A (fluxus) változás véghezvitele érdekében ezt az akadályozó energiát külső tápforrásból ellensúlyozni kell. A légrés csökkenésekor a fluxus növeléséhez növelni, a légrés növekedésekor a fluxus csökkentéséhez csökkenteni kell a <u>külső</u> energia-felvételt.
A külső $F_k$ erő által végzett mechanikai munka

$$dW_{mech}=F_k dx.$$

A fluxus megváltozása miatt a mágneskörben felhalmozott energia is megváltozik.
A szórás elhanyagolásával a vas mágneses energiája az indukció változása miatt változik

$$dW_{vas}=V_{vas}H_{vas}dB_{vas},$$

a légrésben tárolt mágneses energia az indukció és a légrés megváltozása miatt is változik

$$dW_\delta = \frac{\partial W_\delta}{\partial V_\delta}dV_\delta + \frac{\partial W_\delta}{\partial B_\delta}dB_\delta\,.$$

A légrés térfogata és annak megváltozása: $V_\delta=2A_\delta\delta$, $dV_\delta=2A_\delta dx$, így

$$dW_\delta = \frac{1}{2}\frac{B_\delta^2}{\mu_0}\frac{dV_\delta}{dx}dx + \frac{1}{2}V_\delta\frac{2B_\delta}{\mu_0}\frac{dB_\delta}{dx}dx = \frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta dx + V_\delta H_\delta dB_\delta = \frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta dx + 2\delta\, H_\delta d\Phi\,.$$

A veszteségi energia változásának elhanyagolásával az energia egyensúly:

$$dW_{vill} + dW_{mech} = dW_{vas} + dW_\delta.$$

Behelyettesítve:

$$NId\Phi + F_k dx = \ell_{vas}H_{vas}d\Phi + \frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta dx + 2\delta\, H_\delta d\Phi = \left(\ell_{vas}H_{vas} + 2\delta\, H_\delta\right)d\Phi + \frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta dx$$

Mivel a gerjesztési törvény szerint

$$\Theta = NI = \ell_{vas}H_{vas} + 2\delta\, H_\delta\,,$$

statikus állapotban az elektromágnes által kifejtett erő:

$$F_m = -\frac{B_\delta^2}{\mu_0}A_\delta\,,$$

egyezően az állandó mágnesre kapott eredménnyel.

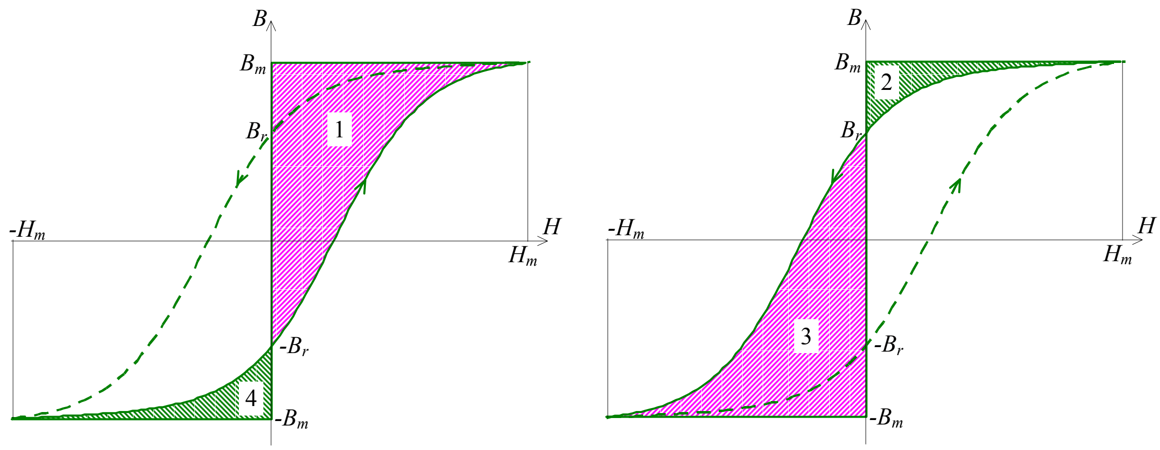
<u>A változó fluxus okozta veszteségek</u>
Az állandó mágneses tér (fluxus) fenntartása nem jár veszteséggel, nem kíván energia-bevitelt (l. állandó mágnesek).
Változó fluxus hatására viszont a mágneses kör vasmagjában veszteségek keletkeznek, amelyek annak melegedését okozzák. A $P_{Fe}$ vasveszteségnek jellegét tekintve két összetevője van:

- hiszterézis veszteség,
- örvényáram veszteség.

$$P_{Fe}= P_{hisz} + P_{örv}.$$

Nemszinuszos változás esetén a felharmonikusok által okozott vasveszteséget külön kell számítani.

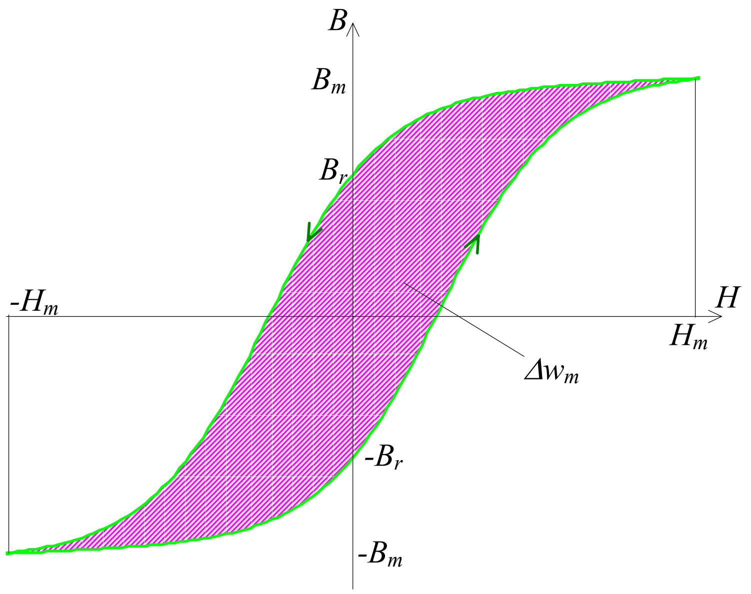
<u>Vasveszteség szinuszos táplálásnál</u>
*a) Hiszterézis veszteség*
A $B$ indukció és a $H$ térerősség változása következtében a vas elemi mágnesei átrendeződnek, ami belső súrlódással jár. Ez az átmágnesezési veszteség. A térfogategységben felhalmozott mágneses energia $w = \int_B HdB$ értéke a hiszterézis görbe mentén szakaszonként számítható.




*A felvett és a leadott mágneses energia a hiszterézis görbe*
*felszálló ága mentén* *lelszálló ága mentén*

1. A $-B_r \leq B \leq B_m$ ($0 \leq H \leq H_m$) szakaszon $H \geq 0$ és $dB > 0$, ezért $\Delta w > 0$, tehát energia felvétel történik.
2. A $B_m \geq B \geq B_r$ ($H_m \geq H \geq 0$) szakaszon $H \geq 0$ és $dB < 0$, ezért $\Delta w < 0$, itt energia leadás történik.
3. A $B_r \geq B \geq -B_m$ ($0 \geq H \geq -H_m$) szakaszon $H \leq 0$ és $dB < 0$, ezért $\Delta w > 0$, ezen a szakaszon is energia felvétel történik.
4. A $-B_m \leq B \leq -B_r$ ($-H_m \leq H \leq 0$) szakaszon $H \leq 0$ és $dB > 0$, ezért $\Delta w < 0$, tehát energia leadás történik.

Egy teljes átmágnesezési periódus alatt a felvett és a leadott energia különbsége – az átmágnesezési veszteség – megegyezik a hiszterézis hurok területével.




*A felvett és a leadott mágneses energia különbsége a hiszterézis görbe alatti terület*

Steinmetz[6] tapasztalati képlete szerint a hiszterézis hurok területe:

$$\Delta w_m = \gamma B_{max}^{\ x},$$

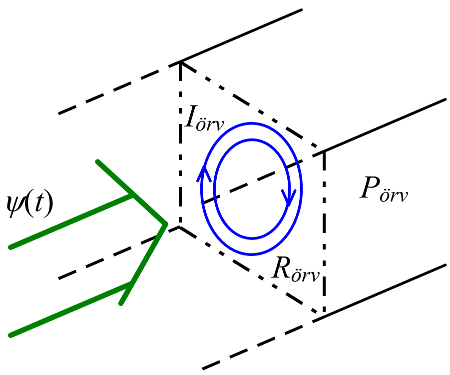
[6] Charles Proteus Steinmetz (1865-1923) német származású (Karl August Rudolf Steinmetz) amerikai kutató, villamosmérnök.

itt $\gamma$ – anyagjellemző, $x$ – $B_{max}$-tól függő anyagjellemző, $x$=1,7-2.
Ez a terület 1 átmágnesezési ciklus veszteségével arányos, a $P_{hisz}$ hiszterézis veszteségi teljesítmény számításához ezt az időegység alatti átmágnesezések számával, az $f$ periódusszámmal és a $V$ térfogattal kell szorozni:

$$P_{hisz}=\gamma B_{max}^{x} fV \approx k_{hisz} \Psi^2 f.$$

Egy adott mágneses körnél $k_{hisz}$ értéke a konkrét geometriára vonatkozik, azt is figyelembe véve, hogy $\Psi$ maximális vagy effektív érték.

*b) Örvényáram veszteség*
A változó fluxus a vasban feszültséget indukál, ami $I_{örv}$ ún. örvényáramokat hoz létre a viszonylag jó villamos vezető vasban. Ha az örvényáram-pálya ellenállása $R_{örv}$, akkor a keletkező örvényáram veszteség, ami a vas melegedését okozza, $P_{örv}=I_{örv}^2 R_{örv}$.
Csökkentése érdekében a vastestet, vasmagot nagy fajlagos ellenállású (pl. szilícium tartalmú) ötvözetből készítik, továbbá egymástól villamosan elszigetelt vékony lemezekből építik össze. A lemezszigetelés valamilyen alkalmas anyagból (pl. lakk) felvitt vékony réteg, vagy a mechanikai és mágneses tulajdonságok beállítását szolgáló hőkezelés során létrehozott szigetelő felület.




*Az örvényáramok keletkezése*

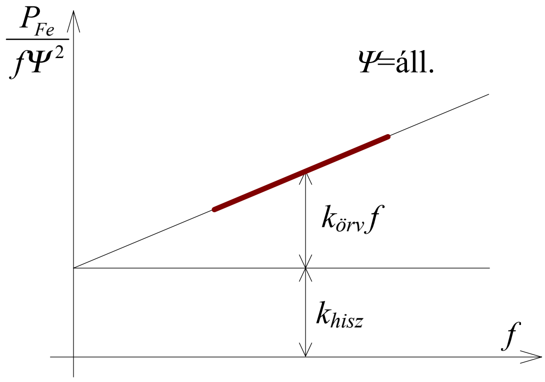
A szinusz alakú változás esetén indukálódó $U_{örv}$ feszültség $U_{örv} \approx \frac{d\psi}{dt} \approx \Psi f$, $I_{örv} \approx U_{örv}$, így

$$P_{örv}=k_{örv} \Psi^2 f^2.$$

Egy adott gépnél $k_{örv}$ értéke a konkrét geometriára vonatkozik, figyelembe véve, hogy $\Psi$ lehet maximális vagy effektív érték.

Az örvényáram- és a hiszterézis veszteség szétválasztása
Fejlesztési és diagnosztikai vizsgálatoknál szükség lehet a vasveszteség egyes összetevőinek méréssel történő számítására.
$\Psi$=áll. esetben, változó frekvenciájú és feszültségű táplálásnál
$P_{Fe}= P_{örv}+ P_{hisz}=k_{örv} \Psi^2 f^2+k_{hisz} \Psi^2 f=f\Psi^2(k_{örv}f+k_{hisz})$, amiből

$$\frac{P_{Fe}}{f\Psi^2} = \left(k_{örv} f + k_{hisz}\right).$$




*Az örvényáram és a hiszterézis veszteség szétválasztása mérési adatok alapján*

A $\frac{P_{Fe}}{f\Psi^2}$ hányados láthatóan szétválik egy állandó és egy frekvenciától lineárisan függő összetevőre. Ezt ábrázolva a $k_{örv}$ és $k_{hisz}$ tényezők meghatározhatók.

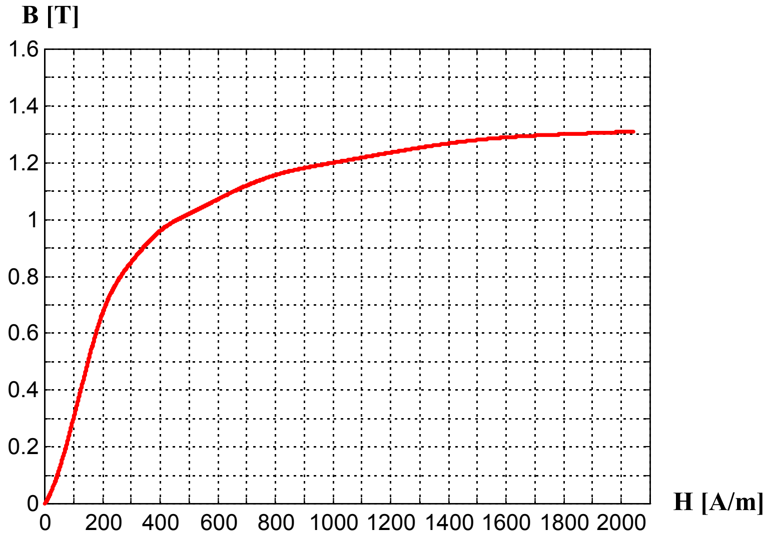
Összeállította: Kádár István
2014. október

**Ellenőrző kérdések**

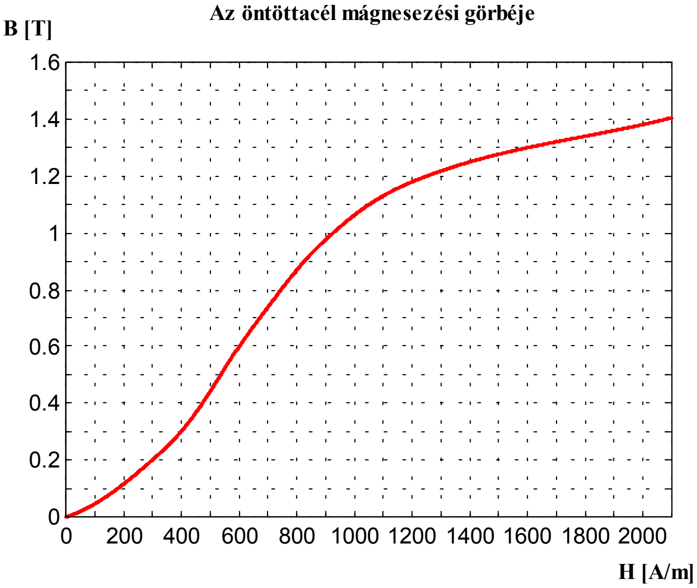
1. Értelmezze az áramokkal kifejezett erőtörvényt.
2. Melyek a mágneses tér jellemzői?
3. Mi a mágneses térerősség, indukció fluxus?
4. Mi a mágneses permeabilitás?
5. Értelmezze a gerjesztési törvényt.
6. Értelmezze az indukció törvényt.
7. Illusztrálja a szórt fluxust.
8. Közelítően illusztrálja áramjárta vezető és vezető gyűrű mágneses terét.
9. Közelítően illusztrálja a szolenoid és a toroid mágneses terét.
10. Milyen elhanyagolással élnek a szolenoid és a toroid mágneses körének számításánál?
11. Mi a tekercsfluxus (fluxuskapcsolódás)?
12. Mi a mozgási indukció jelensége?
13. Mutassa be a villamos generátor és motor működési elvét.
14. Mi a nyugalmi indukció jelensége?
15. Értelmezze Lenz törvényét nyugalmi és mozgási indukciónál.
16. Mi a soros- és a párhuzamos mágneses körök számítási elve?
17. Értelmezze a mágnesezési és a hiszterézis görbét.
18. Mi az önindukció jelensége és az önindukciós tényező?
19. Mi az kölcsönös indukció jelensége és a kölcsönös indukciós tényező?
20. Hogyan bontható összetevőkre a csatolt tekercsek mágneses tere?
21. Hogyan határozható meg a vasmentes tekercsben tárolt mágneses energia?
22. Hogyan határozható meg a vasmagos tekercsben tárolt mágneses energia?
23. Hogyan határozható meg térjellemzőkkel egy adott térrészben tárolt mágneses energia?
24. Hogyan határozható meg térjellemzőkkel a mágneses energiasűrűség?
25. Hogyan határozható meg a csatolt tekercsekben tárolt mágneses energia?
26. Illusztrálja és értelmezze az állandó mágnes $B(H)$ görbéjét.
27. Hogyan határozható meg az állandó mágnes erőhatása?
28. Mit jelent az állandó mágnes optimális kihasználása?
29. Mi az "energiaszorzat"?
30. Milyen összetevői vannak a vasveszteségnek?
31. Értelmezze a hiszterézis veszteséget és frekvenciafüggését.
32. Értelmezze az örvényáram veszteséget és frekvenciafüggését.
33. Mutassa be az induktivitást (tekercset) tartalmazó áramkör be- és kikapcsolási jelenségét.

## Példák, feladatok

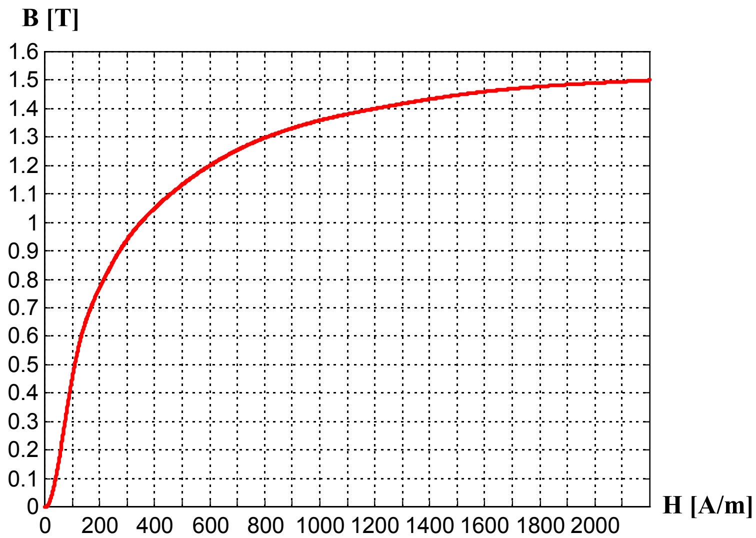
**A transzformátorlemez mágnesezési görbéje**




**Az öntöttacél mágnesezési görbéje**



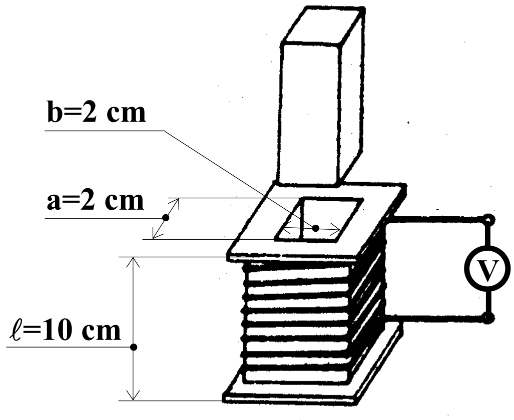

**A dinamólemez mágnesezési görbéje**



A vákuum permeabilitása: $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$.

---

1. Egy rúdmágnes indukciója $B$=0,8 T. A mágnest 0,1 s idő alatt egyenletes mozgatással betoljuk az ábrán látható, $N$=100 menetszámú, előzőleg fluxusmentes tekercsbe. Mekkora indukált feszültség mérhető ezalatt a tekercs kivezetésein?

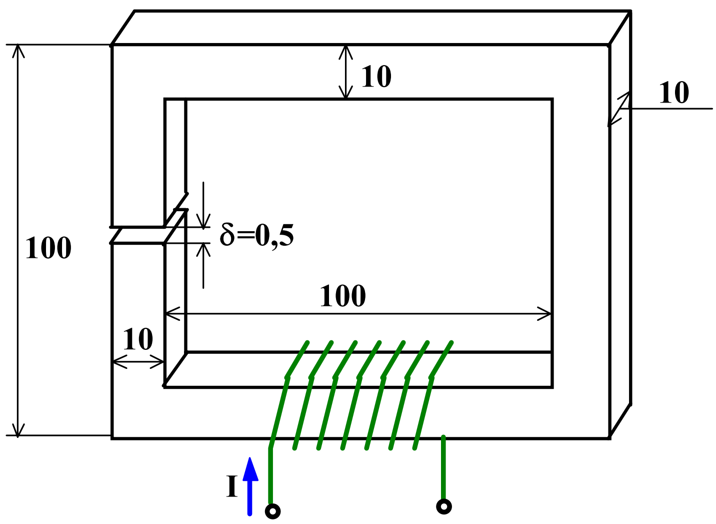



{$U_i$=0,32 V}

2. Az 1. feladatban szereplő tekercs árama $I$=0,5 A, menetszáma $N$=100.
Mekkora a szolenoid belsejében a homogénnek tekintett mágneses tér $H$ térerőssége, $\Phi$ fluxusa és $B$ indukciója, ha a tekercs vasmentes?
Mi fog megváltozni és hogyan, ha a tekercsbe transzformátorlemezből készült vasmagot helyezünk?

{$H$=500 A/m, $\Phi$=2,512·10$^{-7}$ Vs, $B$=6,28·10$^{-4}$ T, vasmaggal $B$=1,02 T, $\Phi$=4,08·10$^{-4}$ Vs}

3. Az ábrán látható vasmag transzformátorlemezből készült. A tekercs menetszáma $N$=100. A mágneses tér homogénnek tekinthető és szórásmentes. Mekkora áramra van szükség ahhoz, hogy a légrés indukciója 1 T legyen? Mekkora a mágneses tér $H$ térerőssége, $\Phi$ fluxusa és $B$ indukciója a vasban és a légrésben?

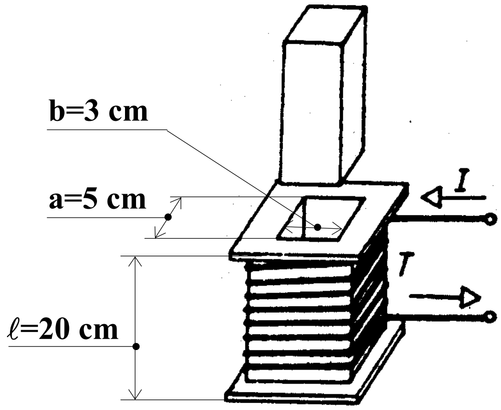



{$I$=5,78 A, $H_\delta$=0,796·10$^6$ A/m, $\Phi_\delta$=10$^{-4}$ Vs, $B_\delta$=1 T, $H_v$=450 A/m, $\Phi_v$=10$^{-4}$ Vs, $B_v$=1 T}

4. Mekkora az ábrán látható $N$=200 menetszámú tekercs induktivitása $I$= 0,2 A és $I$= 1 A áram esetén, ha

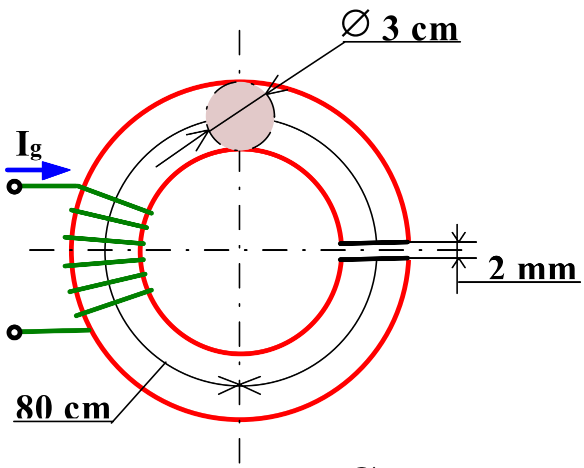
a) a tekercs vasmentes,

b) ha a tekercsbe transzformátorlemezből készült vasmagot helyezünk? A szórást hanyagolja el.



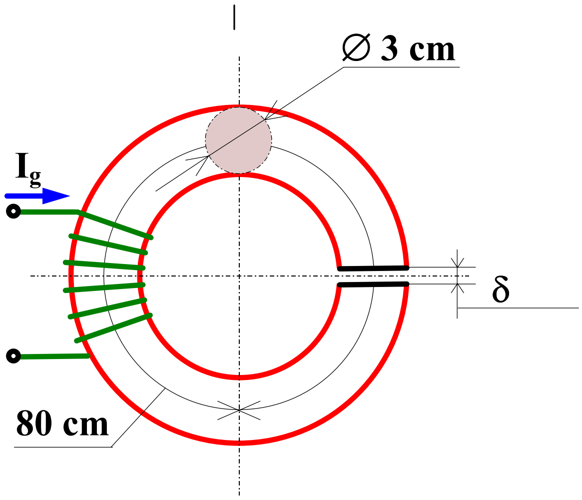

{a) $L$=376,8 μH, független a áramtól,
b) $L$(0,2 A)=1,005 H, $L$(1 A)=0,36 H}

5. Mekkora $I_g$ árammal kell az ábrán látható öntöttacél gyűrű $N$=600 menetes tekercsét gerjesztenünk, hogy a légrés $\Phi_\delta$ fluxusa megegyezzen azzal a $\Phi_v$ értékkel, amit a vasban kapunk *zárt* gyűrű $I_{g1}$=1 A árammal való gerjesztésekor? A szórást hanyagolja el.



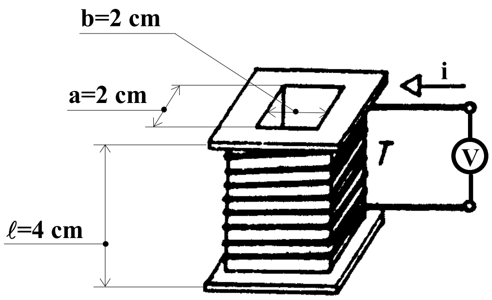

{$I_g$= 3,12 A}

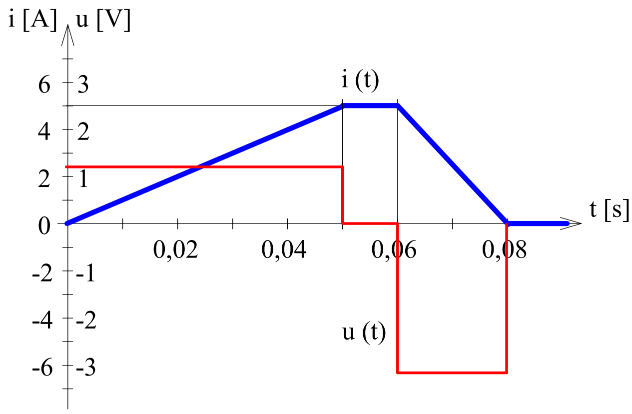
6. Az ábrán látható – transzformátorlemezből készült – gyűrű $N$=500 menetes tekercsét $I_g$=2 A árammal gerjeszve a légrésindukció $B_\delta$= 0,9 T. Mekkora a légrés mérete? Mekkora gerjesztőáram szükséges $B_\delta$= 1,0 T indukció létrehozásához? A szórást hanyagolja el.




{$\delta$=$10^{-3}$ m, $I_g$= 2,3 A}

7. Az ábrán látható $N$=1000 menetszámú vasmentes T tekercset vezérelhető áramgenerátorról tápláljuk az időfüggvény szerinti árammal. Mekkora a tekercs induktivitása? Milyen lesz az indukált feszültség időbeli lefolyása?



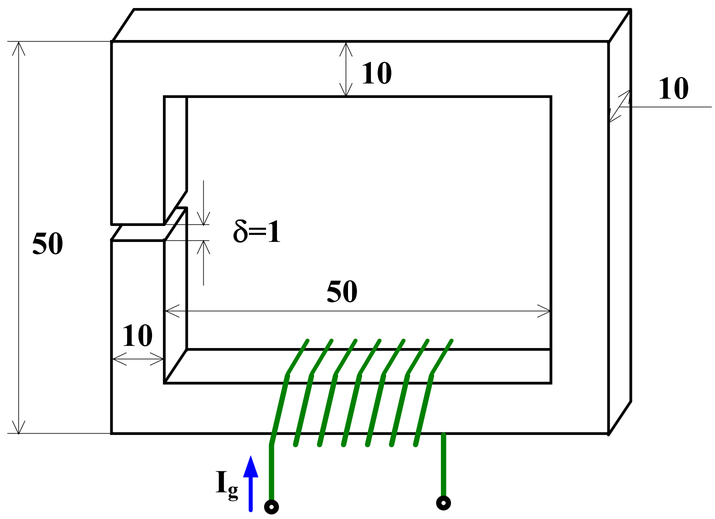




{$L$=1,256·10$^{-2}$ H, $u_1$=1,256 V, $u_2$=-3,14 V}

8. Az ábrán látható vasmag dinamólemezből készült, a tekercs menetszáma $N$=100. A mágneses tér homogénnek tekinthető és szórásmentes. Mekkora az $I_g$ gerjesztő áram és a tekercs $L$ induktivitása, ha a légrésindukció

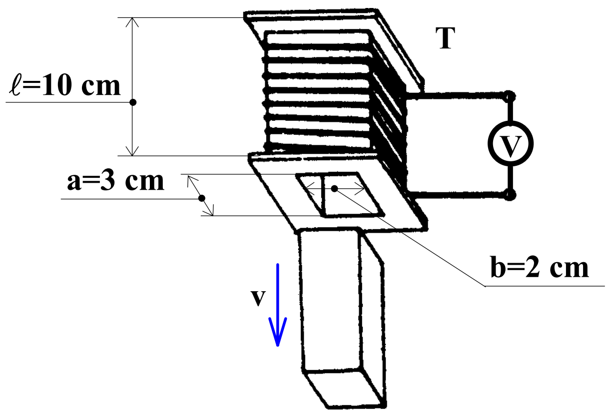
a) $B_\delta=1\ \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$,

b) $B_\delta=1{,}4\ \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$.




{a) $I_g$= 8,66 A, $L$=1,15 mH,
b) $I_g$= 13,546 A, $L$=1,03 mH }

9. Egy rúdmágnes indukciója $B$=0,8 T. A mágnes $t$= 0,1 s idő alatt állandó $v$ sebességű egyenletes mozgással kiesik az ábrán látható, $N$=100 menetszámú T tekercsből, ami után az fluxusmentessé válik. Mekkora indukált feszültség mérhető a mágnes mozgása alatt a tekercs kivezetésein?

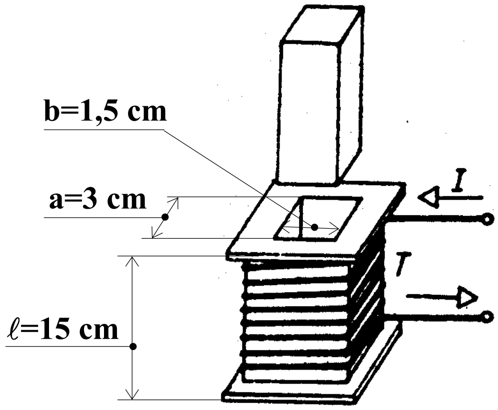



{$U_i$=0,48 V}

10. Mekkora az ábrán látható, $N$=150 menetszámú tekercs induktivitása $I$ = 0,1 A és $I$ = 1,2 A áram esetén, ha

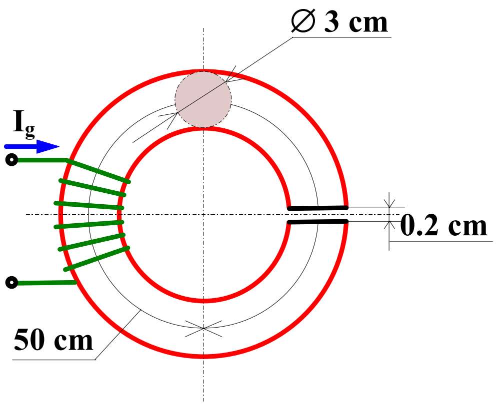
a) a tekercs vasmentes,

b) ha a tekercsbe dinamólemezből készült vasmagot helyezünk? A szórást hanyagolja el, továbbá használja az $\ell$>>$a$ és $\ell$>>$b$ közelítést.



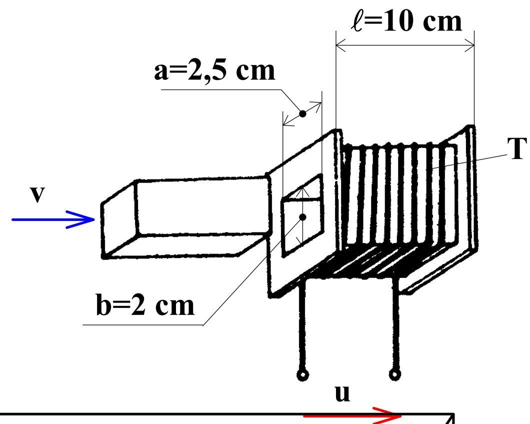

{a) $L$=84,8 μH - áramtól független,
b) $L$(0,15 A)=303 mH, $L$(1,2 A)=78 mH}

11. Az ábrán látható – dinamólemezből készült – gyűrű tekercse $N$=100 menetes, a mágneses tér homogénnek tekinthető és szórásmentes. Mekkora $I_g$ áramra van szükség ahhoz, hogy a légrésben az indukció 1,3 T legyen? Mekkora a mágneses tér $H$ térerőssége (1 pont) és $\Phi$ fluxusa a vasban és a légrésben?




{ $I_g$= 24,69 A, $H_v$=800 A/m, $H_\delta$=1,03·10$^6$ A/m,
$\Phi_v$=$\Phi_\delta$=0,9·10$^{-3}$ Vs}

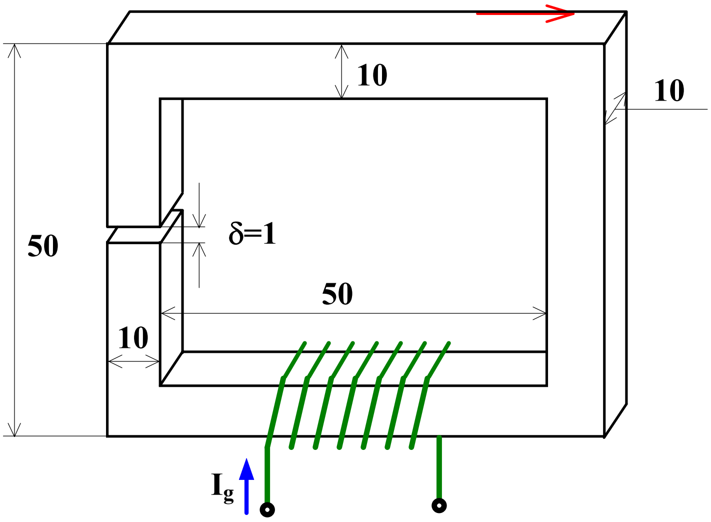
12. Az ábrán látható tekercset induktív érzékelőként használják, aminek a $v$=1 m/s sebességgel érkező $B$=0,8 T indukciójú mágnesrúd beérkezését $u$=2 V-os feszültségimpulzussal kell jeleznie. Mekkora legyen a tekercs $N$ menetszáma? Kezdeti állapotban a tekercs fluxusmentes.
{$N$=500}




13. Az ábrán látható vasmag transzformátorlemezből készült, a tekercs menetszáma $N$=200. A mágneses tér homogénnek tekinthető és szórásmentes. Mekkora az $I_g$ gerjesztő áram és a tekercs $L$ induktivitása, ha a légrésindukció

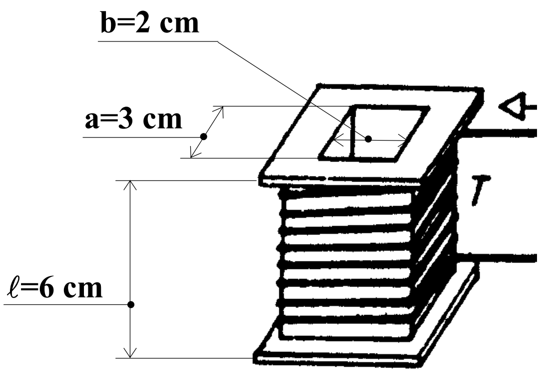
a) $B_\delta$=1 $\dfrac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$,

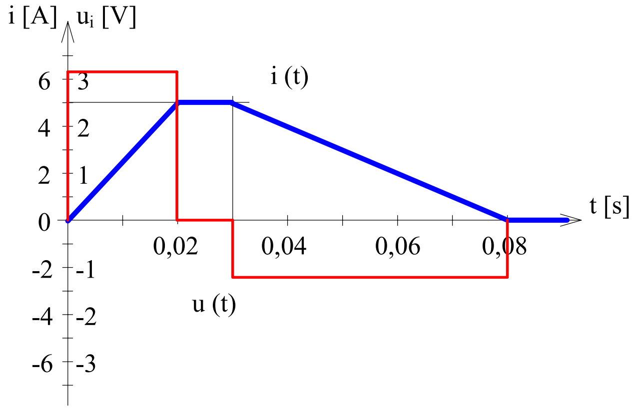
b) $B_\delta$=1,2 $\dfrac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$.




{a) $I_g$= 4,425 A, $L$=5,52 mH,
b) $I_g$= 5,77 A, $L$=4,16 mH }

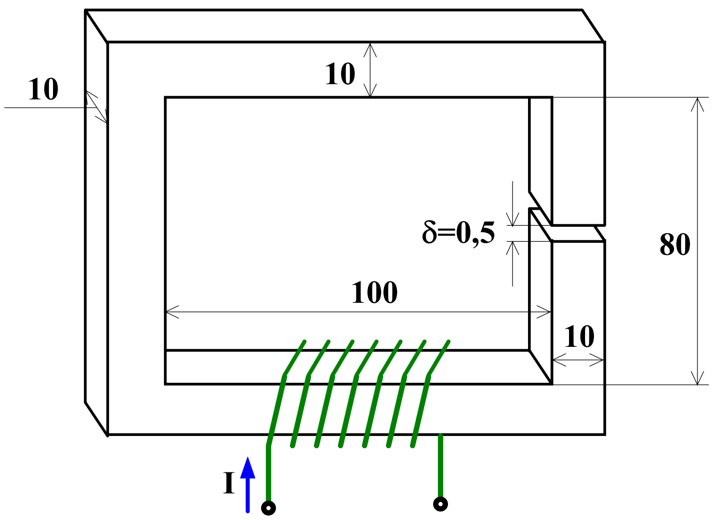
14. Az ábrán látható **vasmentes** T tekercs menetszáma $N$=1000. Mekkora a tekercs $L$ induktivitása? Mekkora a tekercs mágneses terében tárolt w energia legnagyobb értéke? Milyen az indukált feszültség $u_i(t)$ időbeli lefolyása, ha vezérelhető áramgenerátorról tápláljuk az $i(t)$ időfüggvény szerinti árammal?



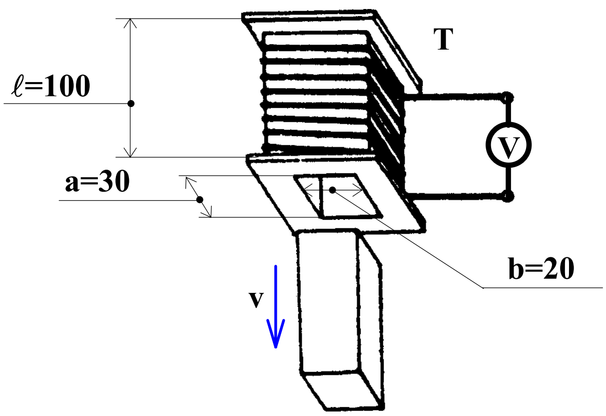

{$W_{max}$=0,157 VAs, $L$=12,56 mH, $u_1$=3,14, V $u_2$=-1,256 V}

15. Az ábrán látható vasmag dinamólemezből készült, a tekercs menetszáma $N$=100. A mágneses tér a vasban és a légrésben is homogénnek tekinthető és szórásmentes. Mekkora $I$ áramra van szükség ahhoz, hogy a légrés indukciója 1,3 T legyen? Mekkora ebben az esetben a $\Phi$ mágneses fluxus a vasban és a légrésben ? Mekkora a tekercs $L$ önindukciós tényezője?



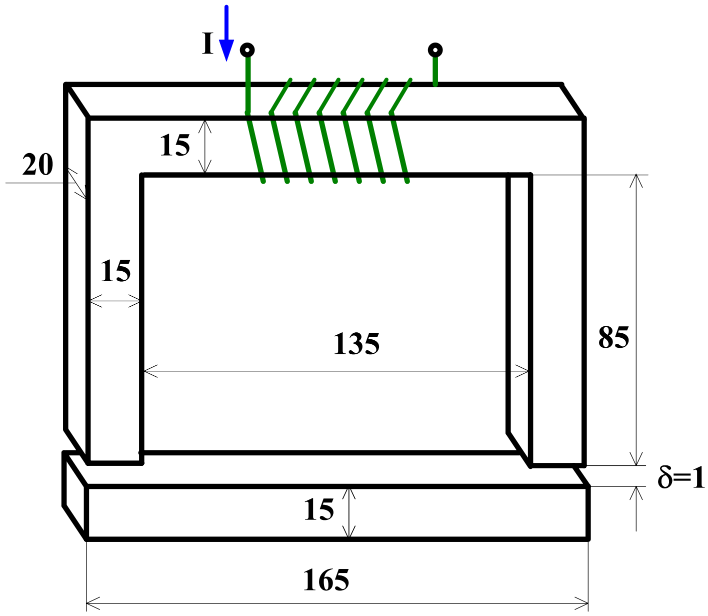

{$I$=8,375 A, $\Phi_v=\Phi_\delta=1{,}3\cdot10^{-4}$ Vs, $L$=1,55 mH}

16. Egy rúdmágnes indukciója $B$=0,9 T. A mágnes $t$= 0,1 s idő alatt állandó v sebességű egyenletes mozgással kiesik az ábrán látható, $N$=100 menetszámú T tekercsből, ami után az fluxusmentessé válik. Mekkora indukált feszültség mérhető a mágnes mozgása alatt a tekercs kivezetésein? Mekkora a vasmentessé vált tekercs induktivitása?




{$U_i$=0,54 V, $L$=75,36 mH}

17. Az ábrán látható vasmag transzformátorlemezből készült, a tekercs menetszáma $N$=200. A mágneses tér a vasban és a légrésben is homogénnek tekinthető és szórásmentes. Mekkora $I$ áramra van szükség ahhoz, hogy a légrés indukciója 1,2 T legyen? Mekkora ebben az esetben a $\Phi$ mágneses fluxus a vasban és a légrésben? Mekkora a tekercs $L$ önindukciós tényezője? Mekkora a rendszer mágneses energiája? Mekkora a mágneses energia a vasban és mekkora a légrésekben?




{$I$=12,05 A, $\Phi_v$=$\Phi_\delta$=0,36·10$^{-3}$ Vs, $L$=5,975 mH, $W$=0,4338 Ws, $W_v$=0,09 Ws, $W_\delta$=0,3438 Ws}