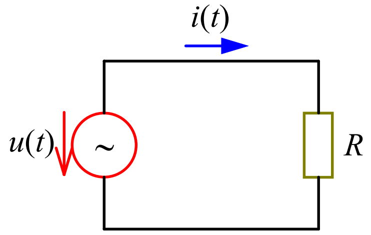
Egyszerű áramkörök árama, feszültsége, teljesítménye

A szokásos előjelek
Általában az ún. fogyasztói pozitív irányokat használják, ezek szerint:
- a φ fázisszög az áram helyzete a feszültség szinusz hullám szöghelyzetéhez képest,
- a fogyasztott P hatásos teljesítmény a pozitív és a termelt a negatív,
- az induktív fogyasztó Q meddő teljesítménye pozitív, a kapacitívé negatív.

1. Ohmos ellenállás
Váltakozó feszültségre kapcsolt ellenállás feszültségesése minden pillanatban egyensúlyt tart a hálózati (táp)feszültséggel.



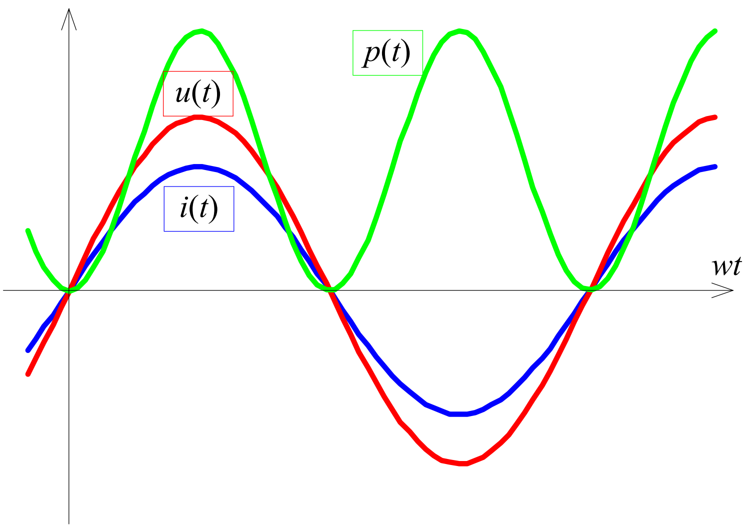
Váltakozó feszültségforrásra kapcsolt R ellenállás áramköri vázlata

$u(t)$-$i(t)R$=0 $\Rightarrow$ $u(t)$=$i(t)R$
Ha a tápfeszültség szinusz függvény szerint változik, $u(t)=U_m sin\,\omega t$, φ_u=0, akkor az előző egyenletből:

$i(t)=\frac{u(t)}{R}=\frac{U_m}{R}sin\,\omega\,t=I_m\,sin\,\omega\,t$, itt $I_m=\frac{U_m}{R}$.

Ohmos ellenálláson az áram fázisban van a feszültséggel, $\varphi_i=\varphi_u$, így φ=0.

Az áram és a feszültség effektív értéke közötti összefüggés: $I_{eff}=\frac{U_{eff}}{R}$, vagy $I=\frac{U}{R}$.



Az ellenállás feszültségének, áramának és teljesítményének időfüggvénye

A teljesítmény pillanatértéke:

$$p(t)=u(t)\cdot i(t)=U_m\,sin\,\omega\,t\cdot I_m\,sin\,\omega\,t=U_m I_m\,sin^2\,\omega\,t=$$

$$=\frac{U_m I_m}{2}-\frac{U_m I_m \cos 2\omega t}{2}=\frac{U_m I_m}{2}(1-\cos 2\omega t).$$

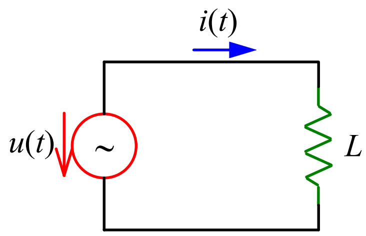
A teljesítmény egy középérték körül kétszeres frekvenciájú koszinusz függvény szerint leng. Előjele mindig pozitív, tehát az energiaáramlás iránya minden pillanatban azonos.

A teljesítmény középértéke: $P=\frac{U_m I_m}{2}=U_{eff} I_{eff}=UI=\frac{U^2}{R}=I^2 R$.

Az ellenállás teljesítménye **hatásos teljesítmény**, mértékegysége $[P]$=W **watt**.

2. Induktivitás

Ideális (ellenállás mentes) induktivitásra (tekercsre) kapcsolt váltakozó feszültség hatására folyó áram váltakozó mágneses teret hoz létre. A váltakozó mágneses tér az induktivitáson önindukciós feszültséget indukál. Ez a feszültség minden pillanatban egyensúlyt tart a hálózati (táp)feszültséggel.



Váltakozó feszültségforrásra kapcsolt L induktivitás áramköri vázlata

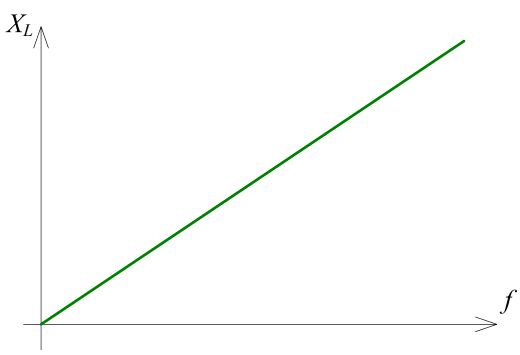
$$u(t)-L\frac{di(t)}{dt}=0 \Rightarrow u(t)=L\frac{di(t)}{dt}.$$

Ha a tápfeszültség szinusz függvény szerint változik, $u(t)=U_m \sin\omega t$, $\varphi_u=0$, akkor az előző egyenletből:

$$i(t)=\frac{U_m}{L}\int \sin\omega t\,dt=-\frac{U_m}{L\omega}\cos\omega t=-I_m\cos\omega t=I_m\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right),\text{ itt } I_m=\frac{U_m}{L\omega}.$$

Az áram 90°-os fáziskéséssel követi a feszültséget $\varphi_i=\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

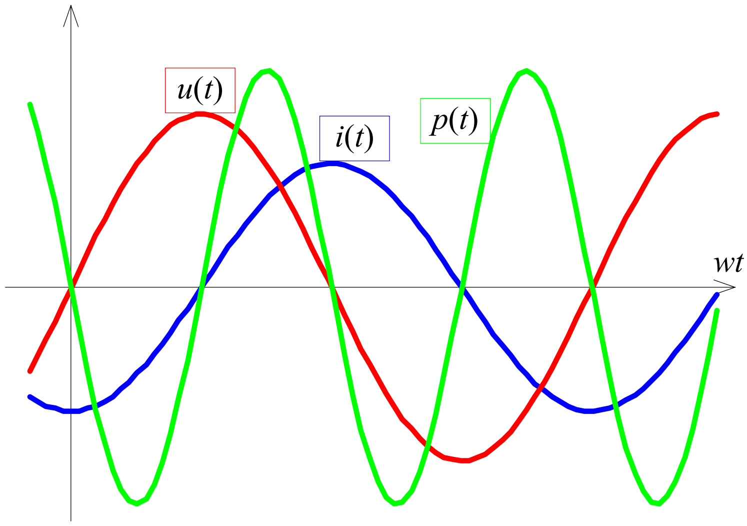
Az áram és a feszültség effektív értéke közötti összefüggés: $I_{eff}=\frac{U_{eff}}{L\omega}$, vagy $I=\frac{U}{L\omega}$.



Az induktív reaktancia frekvencia-függése

$\omega L=X_L$ - az induktív ellenállás (induktív reaktancia), mértékegysége $[X_L]=\Omega$ ohm.

Az induktív reaktancia $X_L=\omega L=2\pi f L$ arányos a frekvenciával és az induktivitással. A tekercsben indukálódó feszültséget az induktív ellenálláson eső feszültség helyettesíti.



Az induktivitás feszültségének, áramának és teljesítményének időfüggvénye

A teljesítmény pillanatértéke:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = -U_m \sin\omega\, t \cdot I_m \cos\omega\, t = -U_m I_m \frac{\sin 2\omega\, t}{2}$$

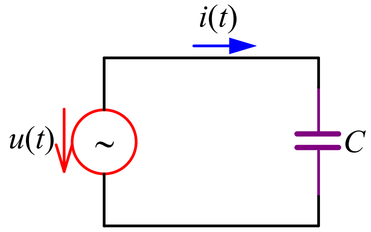
kétszeres frekvenciájú szinusz függvény szerint változik.
A tekercsben negyed periódus alatt (pozitív szakasz) felhalmozódó energia a következő negyed periódus alatt (negatív szakasz) visszaáramlik a tápforrásba. A tekercsben energia nem használódik fel, munkát nem végez, ezért **meddő teljesítmény**nek nevezik és a **maximális (csúcs) értékével jellemzik.**
Az ún. fogyasztói pozitív irányok mellett az **induktív** meddő teljesítmény **pozitív** előjelű:

$Q_L = \frac{U_m I_m}{2} = U_{eff} I_{eff} = UI = \frac{U^2}{X_L} = I^2 X_L$, mértékegysége [$Q$]=$VAr$ **voltamper reaktív.**

A meddő teljesítmény fenti értelmezése csak szinuszos táplálás esetén igaz. Nemszinuszos vagy többhullámú táplálásnál járulékos veszteségek jelennek meg, ezeket gyakran a meddővel összevonják, pl. impulzus-szerű táplálásnál.

3. Kapacitás
Egy kondenzátorban tárolt töltés minden pillanatban arányos a fegyverzetei közötti feszültséggel: $q(t)=Cu(t)$.
Ha a feszültség változik, változik a tárolt töltés és a töltés változásának megfelelő áram folyik az elektródokhoz (vezetési áram), illetve a dielektrikumon át (eltolási áram)

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}.$$



Váltakozó feszültségforrásra kapcsolt C kapacitás áramköri vázlata

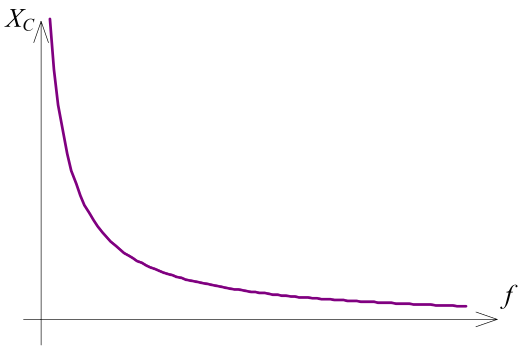
Ha a tápfeszültség szinusz függvény szerint változik, $u(t)=U_m sin\omega t$, $\varphi_u=0$, akkor az előző egyenletből:

$$i(t)=C\frac{du(t)}{dt}=CU_m\frac{d\,sin\,\omega\,t}{dt}=C\omega\,U_m\,cos\,\omega\,t=C\omega\,U_m\,sin\left(\omega\,t+\frac{\pi}{2}\right)=I_m\,sin\left(\omega\,t+\frac{\pi}{2}\right),$$

itt $I_m=C\omega\,U_m=\frac{U_m}{\frac{1}{\omega\,C}}=\frac{U_m}{X_C}$.

Az áram 90°-kal siet a feszültséghez képest $\varphi_i=\varphi=\frac{\pi}{2}$.

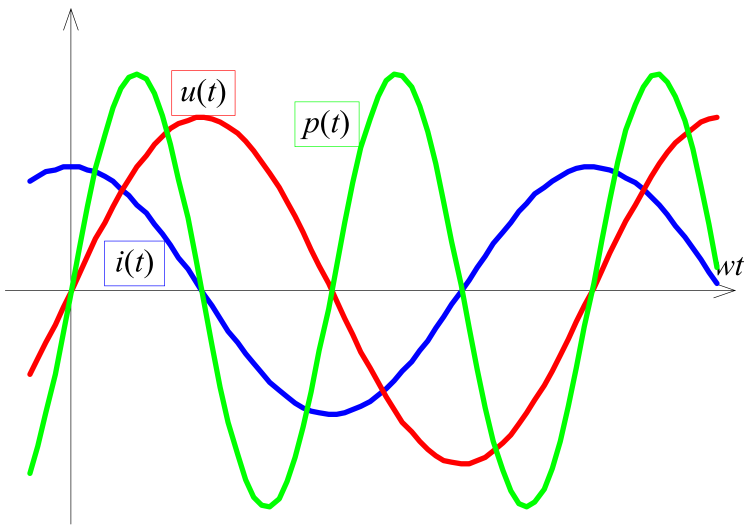
Az áram és a feszültség effektív értéke közötti összefüggés: $I_{eff}=C\omega U_{eff}=X_C U_{eff}$, vagy $I=X_C U$.



A kapacitív reaktancia frekvencia-függése

$\frac{1}{\omega\,C}=X_C$ a kapacitív ellenállás (kapacitív reaktancia), mértékegysége $[X_C]=\Omega$ ohm.

A kapacitív reaktancia $X_C=\frac{1}{\omega\,C}=\frac{1}{2\pi\,f\,C}$ fordítottan arányos a frekvenciával és a kapacitással.



A kapacitás feszültségének, áramának és teljesítményének időfüggvénye

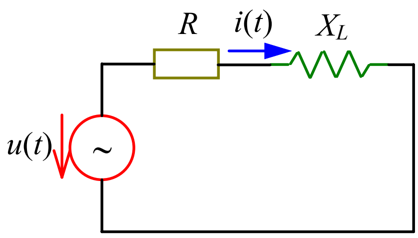
A teljesítmény pillanatértéke:

$$p(t)=u(t)\cdot i(t)=U_m\,sin\,\omega\,t\cdot I_m\,cos\,\omega\,t=U_m I_m\frac{sin\,2\omega\,t}{2}$$

kétszeres frekvenciájú szinusz függvény szerint változik.

A kondenzátorban az áram által szállított töltések építik fel a villamos teret. A negyed periódus alatt (pozitív szakasz) felépülő villamos tér a következő negyed periódus alatt lebomlik (negatív szakasz). A kondenzátorban energia nem használódik fel, munkát nem végez, ezért **meddő teljesítmény**nek nevezik és a **maximális (csúcs) értékével jellemzik.**
Az ún. fogyasztói pozitív irányok mellett a **kapacitív** meddő teljesítmény **negatív** előjelű:
$$Q_C = -\frac{U_m I_m}{2} = -U_{eff} I_{eff} = -UI = \frac{U^2}{X_C} = -I^2 X_C.$$

4. Soros R-L kör
A sorosan kapcsolt ellenállás feszültségesése és az induktivitás önindukciós feszültsége minden pillanatban egyensúlyt tart a tápfeszültséggel:
$$u(t) - u_R(t) - u_l(t) = u(t) - i(t)R - L\frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow u(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt}.$$



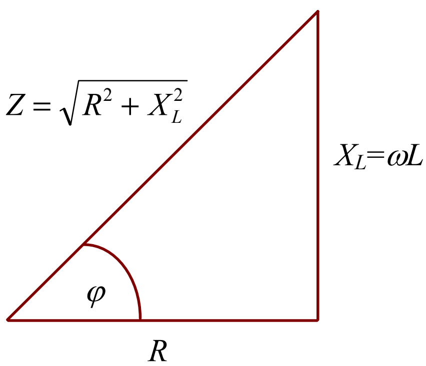
Váltakozó feszültségforrásra kapcsolt soros R-L kör vázlata

A soros áramkör elemein azonos az áram, ha szinusz függvény szerint változik, $i(t)=I_m sin\omega t$, $\varphi_i=0$, akkor az előző egyenletből:
$u(t)= I_m R sin\omega t+I_m \omega L cos\omega t=I_m(R sin\omega t+\omega L cos\omega t)=I_m Z sin(\omega t+\varphi_u)=U_m sin(\omega t+\varphi_u)$
itt $U_m=I_m Z$ és
$R sin\omega t+\omega L cos\omega t=R sin\omega t+X_L cos\omega t= Z sin(\omega t+\varphi_u)$,

$\omega t=0$ esetén $X_L= Z sin\varphi_u$,

$\omega t=\pi/2$ esetén $R= Z sin(\pi/2+\varphi_u)= Z cos\varphi_u$.

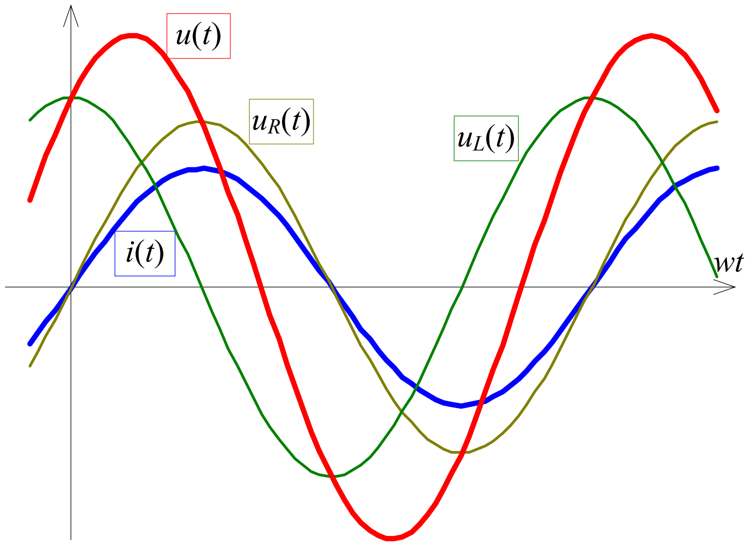
Az utóbbi két egyenlet hányadosából: $\frac{X_L}{R} = tg\varphi_u$, $\varphi_u = arctg\frac{X_L}{R}$ (φ_u mindig pozitív),
a két egyenlet négyzetének összegéből: $R^2+X_L^2= Z^2$.
$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ az áramkör látszólagos ellenállása, impedanciája, $[Z]=\Omega$ ohm.



Az R ellenállás, az X_L impedancia és a Z reaktancia összefüggésének illusztrálása

Az ohmos-induktív áramkörben az $u(t)$ feszültség φ_u szöggel siet az $i(t)$ áramhoz képest. Mivel φ_i=0, az áram fázisszöge a feszültséghez képest $\varphi=\varphi_i-\varphi_u=-\varphi_u$, az áram késik a feszültséghez képest, $\varphi=-arctg\dfrac{X_L}{R}$.

Amennyiben $u(t)$=U$_m$$sin\,\omega t$, φ_u=0, akkor $i(t)=\dfrac{U_m}{Z}sin(\omega\, t-\varphi)$, $Z=\dfrac{U_m}{I_m}=\dfrac{U}{I}$.

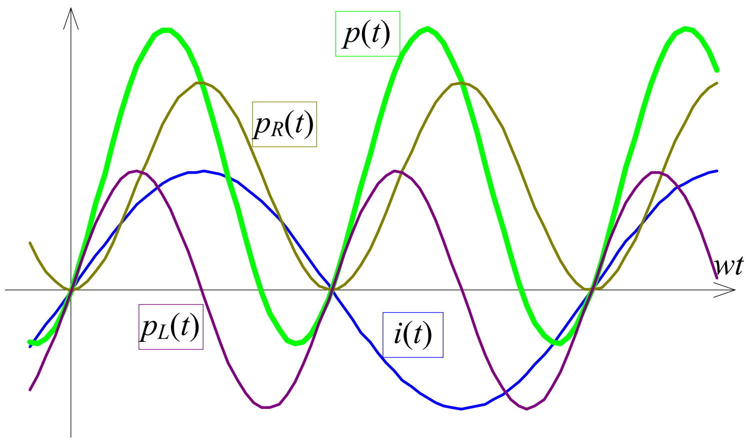


Soros R-L kör áramának és feszültségeinek időfüggvénye

A teljesítmény pillanatértéke:

$$p(t)=u(t)\cdot i(t)=I_m(R\sin\omega\, t+X_L\cos\omega\, t)I_m\sin\omega\, t=$$

$$=I_m^2R\sin^2\omega\, t+I_m^2X_L\cos\omega\, t\cdot\sin\omega\, t=I_m^2R\frac{1-\cos 2\omega\, t}{2}+I_m^2X_L\frac{\sin 2\omega\, t}{2}.$$



Soros R-L kör áramának és teljesítményeinek időfüggvénye

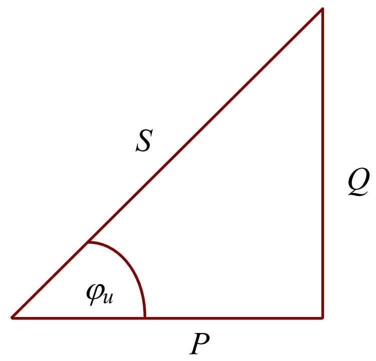
A teljesítmény középértékének különböző alakjai:

$$P=\frac{I_m^2R}{2}=I_{eff}^2R=I^2R=UI\frac{R}{Z}=UI\frac{R}{\sqrt{R^2+X_L^2}}=UI\cos\varphi\,,$$

a meddő teljesítmény:

$$Q=\frac{I_m^2 X_L}{2}=I_{eff}^2 X_L=I^2 X_L=UI\frac{X_L}{Z}=UI\frac{X_L}{\sqrt{R^2+X_L^2}}=UI\sin\varphi\,.$$

A munkát (pl. hőfejlesztést, mechanikai elmozdulást) végző hatásos teljesítmény kisebb, mint az egyenáramú körben számított UI szorzat. Ezt a szorzatot **látszólagos teljesítménynek** nevezik: $S=U_{eff}I_{eff}=UI$, $[S]$=VA **voltamper**.
A hatásos, a meddő és a látszólagos teljesítmény közötti összefüggés az eddigiek alapján: $P=S\cos\varphi$, $Q=S\sin\varphi$, illetve $P^2+Q^2=S^2$.



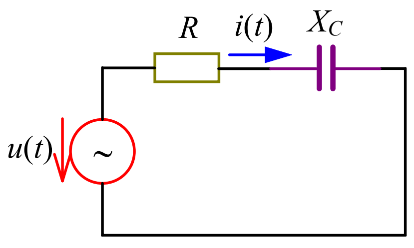
A P hatásos, a Q meddő és az S látszólagos teljesítmény összefüggésének illusztrálása

A villamos elektromechanikai eszközök, berendezések (pl. villamos forgógépek) helyettesítő áramköreiben a hatásos teljesítményt (mechanikai teljesítmény, súrlódási veszteség, vasveszteség stb.) egyenértékű ohmos veszteségi teljesítménnyel képezik, megfelelő nagyságú ellenállás beiktatásával.
A fogyasztott hatásos teljesítmény a hővé vagy más fajta energiává alakuló teljesítmény **középértéke**, ami a tápforrásba nem tér vissza.

5. Soros R-C kör

A soros R-L körhöz hasonló képpen számítható.
Az ellenállás feszültségesése és a kondenzátoron az áram (töltésváltozás) okozta feszültség minden pillanatban egyensúlyt tart a tápfeszültséggel:

$$u(t)-u_R(t)-u_c(t)=u(t)-i(t)R-\frac{1}{C}\int idt=0\ \Rightarrow\ u(t)=i(t)R+\frac{1}{C}\int idt\,.$$



Váltakozó feszültségforrásra kapcsolt soros R-C kör vázlata

Ha az áram szinusz függvény szerint változik, $i(t)=I_m\sin\omega t$, $\varphi_i=0$, akkor az előző egyenletből:

$$u(t)=I_m R\sin\omega\,t-\frac{I_m}{\omega\,C}\cos\omega\,t=I_m Z\sin(\omega\,t+\varphi_u)=U_m\sin(\omega\,t+\varphi_u)\,.$$

itt $U_m=I_mZ$ és

$$R\sin\omega t - \frac{I_m}{\omega C}\cos\omega t = R\sin\omega t - X_C\cos\omega t = Z\sin(\omega t + \varphi_u)$$

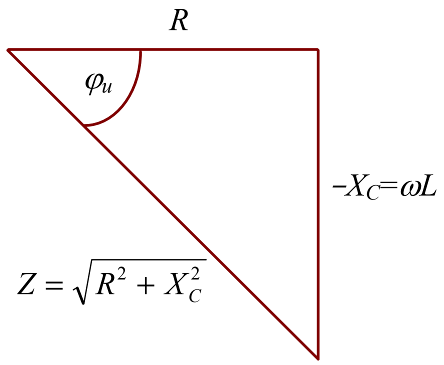
ωt=0 esetén $-X_C = Z\sin\varphi_u$,

ωt=π/2 esetén $R = Z\sin(\pi/2+\varphi_u) = Z\cos\varphi_u$.

Az utóbbi két egyenlet hányadosából: $-\frac{X_C}{R} = tg\varphi_u$, vagy másképpen:

$\varphi_u = arctg\left(\frac{-X_C}{R}\right) = -arctg\frac{X_C}{R}$ (φ_u mindig negatív), a két egyenlet négyzetének összegéből: $R^2+X_C^2=Z^2$. A fázisszög számításánál az X_C kapacitív reaktancia előjele negatív.

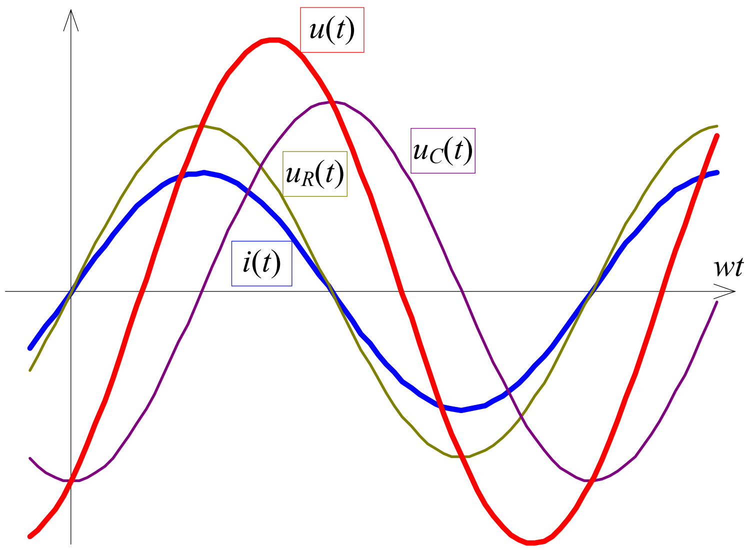
$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ az áramkör látszólagos ellenállása, impedanciája.



Az R ellenállás, az X_C impedancia és a Z reaktancia összefüggésének illusztrálása

Az ohmos-kapacitív áramkörben az $u(t)$ feszültség φ_u szöggel késik az $i(t)$ áramhoz képest. Mivel φ_i=0, az áram fázisszöge a feszültséghez képest $\varphi=\varphi_i-\varphi_u=-\varphi_u$, az áram siet a feszültséghez képest, $\varphi = arctg\frac{X_C}{R}$.

Amennyiben $u(t)=U_m sin\omega t$, φ_u=0, akkor $i(t) = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \varphi)$, $Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$.



Soros R-C kör áramának és feszültségeinek időfüggvénye

A teljesítmény pillanatértéke:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = I_m (R \sin \omega t - X_C \cos \omega t) I_m \sin \omega t =$$

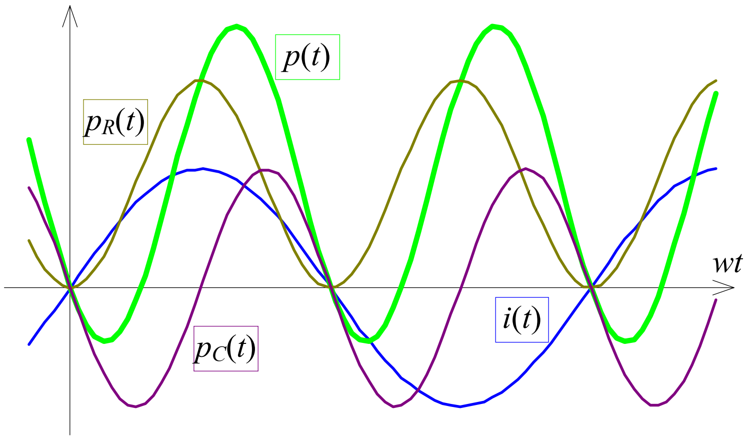
$$= I_m^2 R \sin^2 \omega t - I_m^2 X_C \cos \omega t \cdot \sin \omega t = I_m^2 R \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} - I_m^2 X_C \frac{\sin 2\omega t}{2} .$$

Az ellenállás teljesítményének középértéke a soros *R-L* körhöz hasonló képpen:

$$P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{eff}^2 R = I^2 R = UI \frac{R}{Z} = UI \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = UI \cos \varphi ,$$

a meddő teljesítmény különböző alakjai:

$$Q = -\frac{I_m^2 X_C}{2} = -I_{eff}^2 X_C = -I^2 X_C = -UI \frac{X_C}{Z} = -UI \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = -UI \sin \varphi .$$



Soros R-C kör áramának és teljesítményeinek időfüggvénye

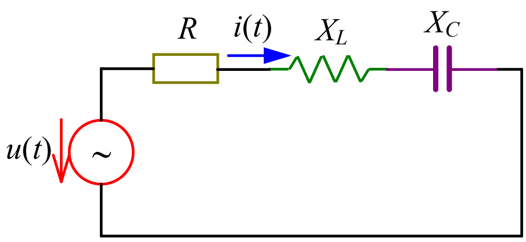
6. Soros R-L-C kör

A soros *R-L* és *R-C* körhöz hasonló képpen számítható.

Az ellenállás feszültségesése, az induktivitás önindukciós feszültsége és a kondenzátoron az áram (töltésváltozás) okozta feszültség minden pillanatban egyensúlyt tart a tápfeszültséggel:

$$u(t) - u_R(t) - u_L(t) - u_C(t) = u(t) - i(t)R - L\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int idt = 0 \text{, ebből}$$

$$u(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int idt .$$



Váltakozó feszültségforrásra kapcsolt soros R-L-C kör vázlata

Ha az áram szinusz függvény szerint változik, $i(t)=I_m \sin \omega t$, $\varphi_i=0$, akkor az előző egyenletből:

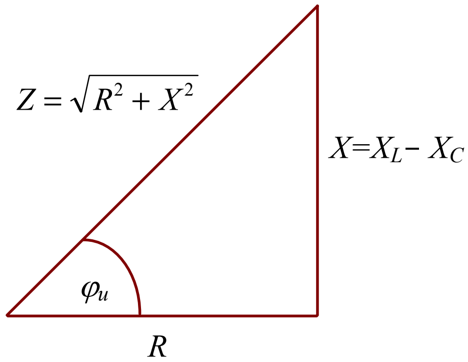
$$u(t) = I_m R \sin \omega t + I_m \omega L \cos \omega t - \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = I_m \left[R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{I_m}{\omega C} \right) \cos \omega t \right]$$

$= I_m\left[R \sin \omega t + \left(X_L - X_C\right) \cos \omega t\right] = I_m\left(R \sin \omega t - X \cos \omega t\right) =$

$= I_m Z \sin(\omega t + \varphi_u) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$,

itt φ_u - az eredő feszültség fázishelyzete a áramhoz képest,

$X = \omega L - \dfrac{1}{\omega C} = X_L - X_C$ - az eredő reaktancia.

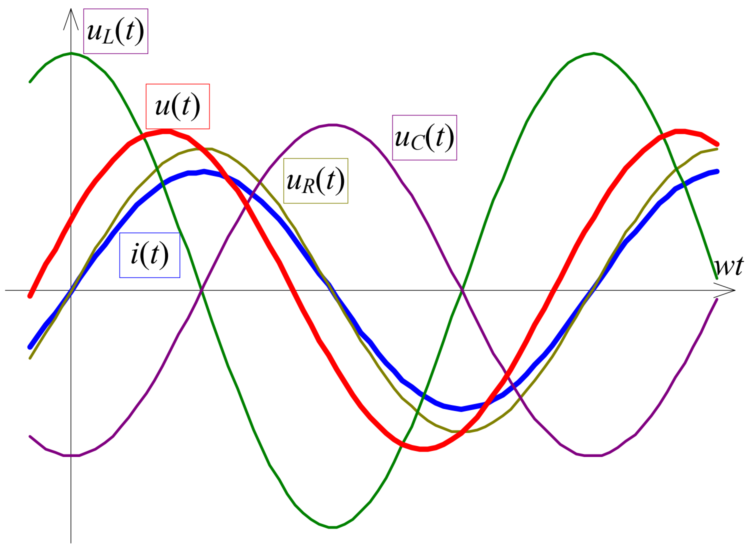


Az R ellenállás, az X impedancia és a Z reaktancia összefüggésének illusztrálása

Az előzőekhez hasonlóan az eredő impedancia:

$Z^2 = R^2 + X^2$, illetve $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$,

és a fázisszög $tg\varphi_u = \dfrac{X_L - X_C}{R} = \dfrac{X}{R}$, vagy $\varphi_u = arctg\dfrac{X_L - X_C}{R} = arctg\dfrac{X}{R}$.



Soros R-L-C kör áramának és feszültségeinek időfüggvénye

Mivel $\varphi_i = 0$, az áram fázisszöge a feszültséghez képest $\varphi = \varphi_i - \varphi_u = -\varphi_u$: $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$.

$\varphi < 0$, ha $X > 0$, azaz $\omega L > \dfrac{1}{\omega C}$ - az eredő áram késik a feszültséghez képest (*R*-*L* jellegű),

$\varphi = 0$, ha $X = 0$, azaz $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ - az eredő áram fázisban van a feszültséggel (*R* jellegű),

$\varphi > 0$, ha $X < 0$, azaz $\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$ - az eredő áram siet a feszültséghez képest (*R*-*C* jellegű), A teljesítmény pillanatértéke:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = I_m\left[R\sin\omega\, t + \left(X_L - X_C\right)\cos\omega\, t\right] I_m \sin\omega\, t =$$

$$= I_m^2 R \sin^2\omega\, t + I_m^2 X \cos\omega\, t \cdot \sin\omega\, t = I_m^2 R \frac{1-\cos 2\omega\, t}{2} - I_m^2 X \frac{\sin 2\omega\, t}{2}$$, részletezve:

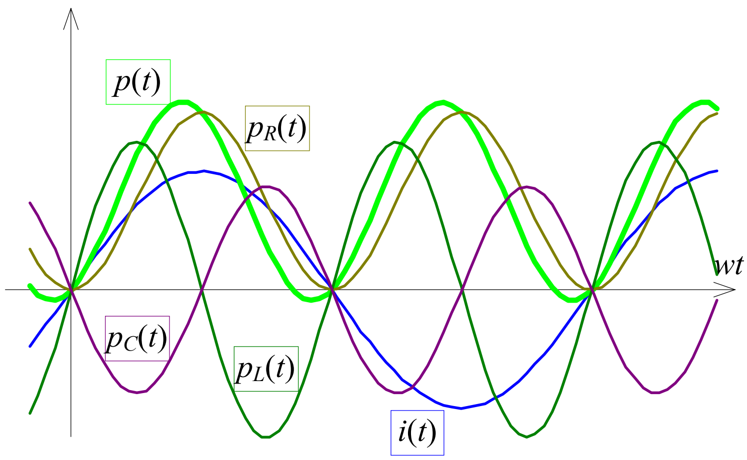
az ellenállás teljesítménye: $p_R(t) = I_m^2 R \frac{1-\cos 2\omega\, t}{2}$,

az induktivitás teljesítménye: $p_L(t) = I_m^2 X_L \frac{\sin 2\omega\, t}{2}$,

a kapacitás teljesítménye: $p_C(t) = -I_m^2 X_C \frac{\sin 2\omega\, t}{2}$.

A $p_R(t)$ hatásos teljesítmény minden pillanatban pozitív, középértéke $P=I^2R$.
$p_L(t)$ és $p_C(t)$ kétszeres frekvenciával leng, középértéke zérus, az eredőjük a kettő összege:

$$q(t) = p_L(t) + p_C(t) = I_m^2\left(X_L - X_C\right)\frac{\sin 2\omega\, t}{2}.$$



Soros R-L-C kör áramának és teljesítményeinek időfüggvénye

Az eredő meddő teljesítmény: $Q = \frac{I_m^2}{2}\left(X_L - X_C\right) = I^2\left(X_L - X_C\right) = I^2 X$.

A meddő teljesítmény egyik része az induktivitás és a kapacitás között leng, a másik részét az áramkör a táphálózatból veszi fel és oda juttatja vissza.
Induktivitás és kapacitás egyidejű jelenléte esetén az induktivitás mágneses energiája (vagy annak egy része) átalakul a kapacitás elektrosztatikus energiájává (vagy annak egy részévé). Amennyiben az induktivitás és kapacitás energiájának maximuma megegyezik, ha az induktivitásban ugyanakkora energia halmozódik fel, mint a kapacitásban, akkor ez a két áramköri elem ellátja egymást energiával és az *R-L-C* áramkör a táphálózatból nem vesz fel meddő teljesítményt és nem is ad oda le. Ez a **rezonancia** jelensége.
A rezonanciára méretezett áramkört **rezgőkör**nek nevezik. Soros áramkörben soros rezonanciáról és soros rezgőkörről beszélünk.

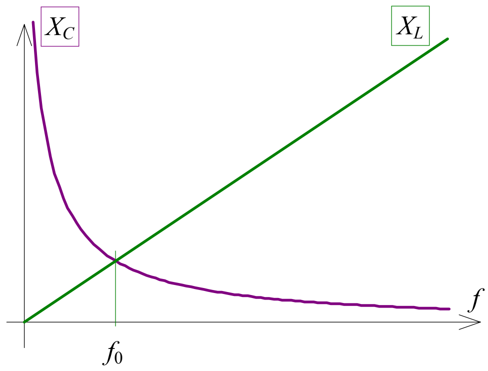
Jelen áramkörben a rezonancia feltétele: $X_L = \omega\, L = \frac{1}{\omega\, C} = X_C$.

Így az eredő impedancia: $Z=R$ (mivel $X_L-X_C=0$), az áram és a feszültség fázisban van, a tápforrásból nincs meddő teljesítmény felvétel. Az induktivitás energiája teljes egészében átalakul kapacitív energiává és fordítva. Az induktivitáson és a kapacitáson eső feszültség minden

pillanatban megegyezik egymással és ellentétes előjelű, a kettő eredője zérus, így rövidzárként viselkedik. A pillanatértékekre:
$u_L(t)=i(t)X_L=-i(t)X_C=u_C(t)$ ezért $u_L(t)+u_C(t)=0$, illetve $p_L(t)=i(t)u_L(t)=-i(t)u_C(t)=-p_C(t)$, $p_L(t)+p_C(t)=0$.
A rezonancia jellemzője a rezonancia frekvencia, aminek jelölése f_r, f_0 vagy f_s, vagy a rezonancia körfrekvencia ω_r, ω_0 vagy ω_s. Számításuk a reaktanciák egyezése alapján:

$$\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C}\text{, amiből } \omega_0^2=\frac{1}{LC} \text{ vagy } \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ és } f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Az összefüggésekből láthatóan akár az induktivitás, akár a kapacitás növelésével a rezonancia frekvencia csökken, fordított feladatnál pedig minél alacsonyabb a szükséges rezonancia frekvencia, annál nagyobb induktivitás és kapacitás értékeket kell választani.



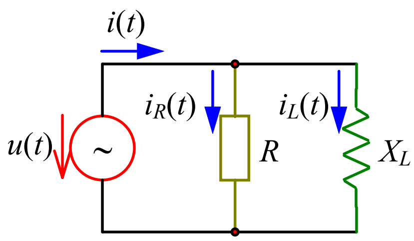
A rezonancia frekvencia értelmezése

7. Párhuzamos R-L kör
A feszültség mindkét elemen azonos,

$$u(t)=i_R(t)R=L\frac{di_L(t)}{dt},$$

az áramok összeadódnak a csomóponti törvény szerint $i(t)=i_R(t)+i_L(t)$,

$$i(t)=\frac{u(t)}{R}+\frac{1}{L}\int u(t)dt.$$



Váltakozó feszültségforrásra kapcsolt párhuzamos R-L kör vázlata

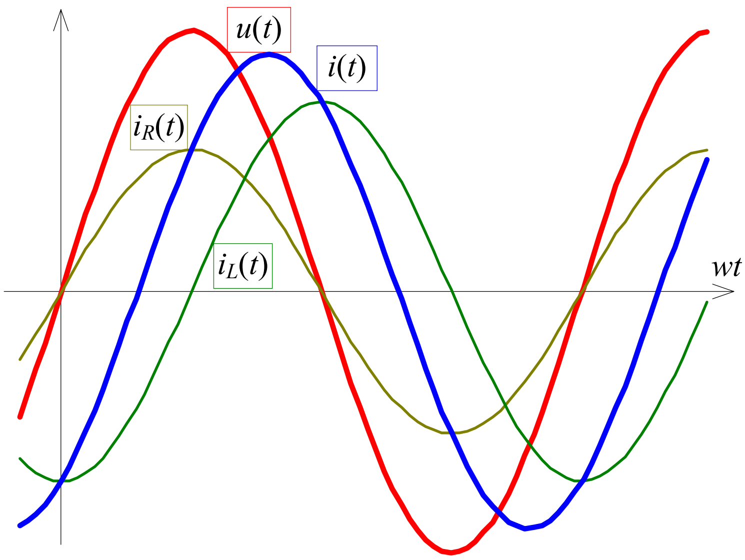
Ha a tápfeszültség szinusz függvény szerint változik, $u(t)=U_m sin\omega t$, $\varphi_u=0$, akkor az előző egyenletből:

$$i(t)=\frac{U_m}{R}sin\,\omega\,t-\frac{U_m}{\omega\,L}cos\,\omega\,t=U_m\left(G\,sin\,\omega\,t-B_L\,cos\,\omega\,t\right)=$$

$$=U_m Y\,sin(\omega\,t+\varphi)=I_m\,sin(\omega\,t+\varphi).$$

Itt $\varphi=\varphi_i$ - a fázisszög, az eredő áram fázishelyzete a feszültséghez képest,

$B_L = \dfrac{1}{\omega L}$ - az induktív vezetés (induktív szuszceptancia), mértékegysége $[B_L]$=S Siemens.



Párhuzamos R-L kör feszültségének és áramainak időfüggvénye

$G\sin\omega t - B_L\cos\omega t = Y\sin(\omega t+\varphi)$,

$\omega t=0$ esetén $-B_L= Y\sin\varphi$,

$\omega t=\pi/2$ esetén $G= Y\sin(\pi/2+\varphi_u)= Y\cos\varphi$.

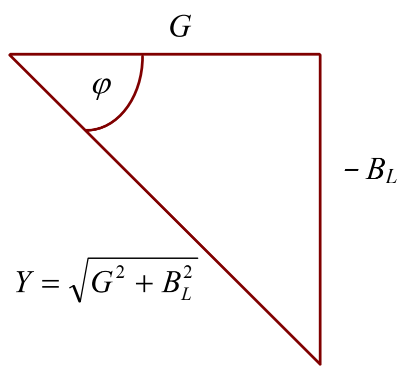
Az utóbbi két egyenlet hányadosából: $\dfrac{-B_L}{G} = tg\varphi$, ebből

$$\varphi = arctg\frac{-B_L}{G} = arctg\frac{-\frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = arctg\left(-\frac{R}{\omega L}\right),$$

a két egyenlet négyzetének összegéből: $G_L{}^2+B^2= Y^2$.

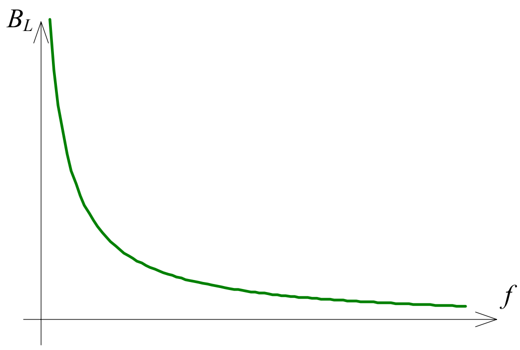
$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2}$ az áramkör látszólagos vezetése, admittanciája, $[Y]$=S Siemens.

A párhuzamos *R-L* kör fázisszöge negatív, az eredő áram φ szöggel késik a feszültséghez képest.



A G konduktivitás, a B_L szuszceptancia és az Y admittancia összefüggésének illusztrálása

Az induktív szuszceptancia $B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{2\pi fL}$ fordítottan arányos a frekvenciával és az induktivitással.



Az induktív szuszceptancia frekvencia-függése

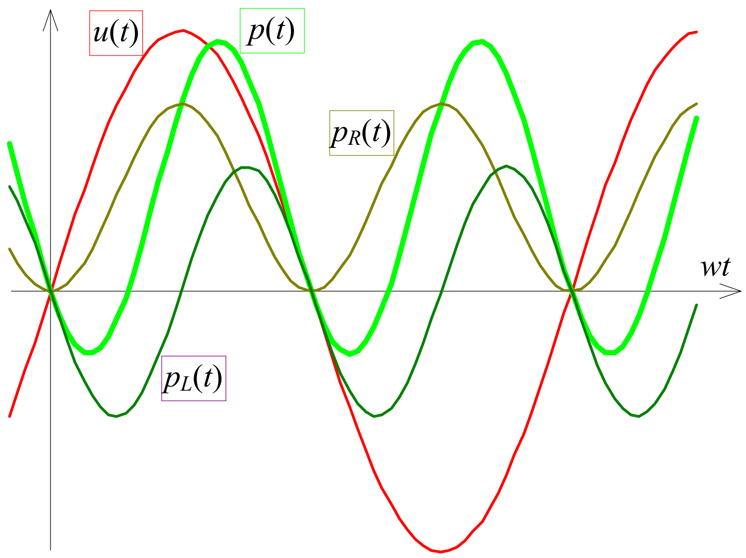
A teljesítmény pillanatértéke:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m (G \sin \omega t - B_L \cos \omega t) U_m \sin \omega t =$$

$$= U_m^2 G \sin^2 \omega t - U_m^2 B_L \cos \omega t \cdot \sin \omega t = U_m^2 G \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} - U_m^2 B_L \frac{\sin 2\omega t}{2}$$, részletezve:

az ellenállás teljesítménye: $p_R(t) = U_m^2 G \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$,

az induktivitás teljesítménye: $p_L(t) = -U_m^2 B_L \frac{\sin 2\omega t}{2}$.



Párhuzamos R-L kör feszültségének és teljesítményeinek időfüggvénye

A teljesítmény középértékének különböző alakjai:

$$P = \frac{U_m^2 G}{2} = \frac{U_{eff}}{R} = \frac{U}{R} = UI \cos \varphi ,$$

a meddő teljesítmény:

$$Q = \frac{U_m^2 B_L}{2} = \frac{U_{eff}^2}{X_L} = \frac{U^2}{X_L} = UI \sin(-\varphi) .$$

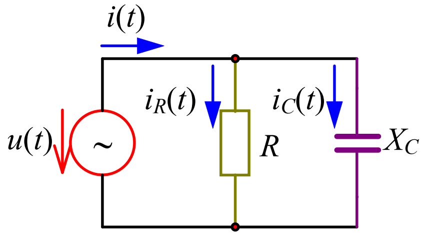
8. Párhuzamos R-C kör

A feszültség mindkét elemen azonos,

$$u(t) = i_R(t)R = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt\,,$$

az áramok összeadódnak a csomóponti törvény szerint $i(t)=i_R(t)+ i_C(t)$ vagy

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L}\int u(t)dt + C\frac{du(t)}{dt}.$$

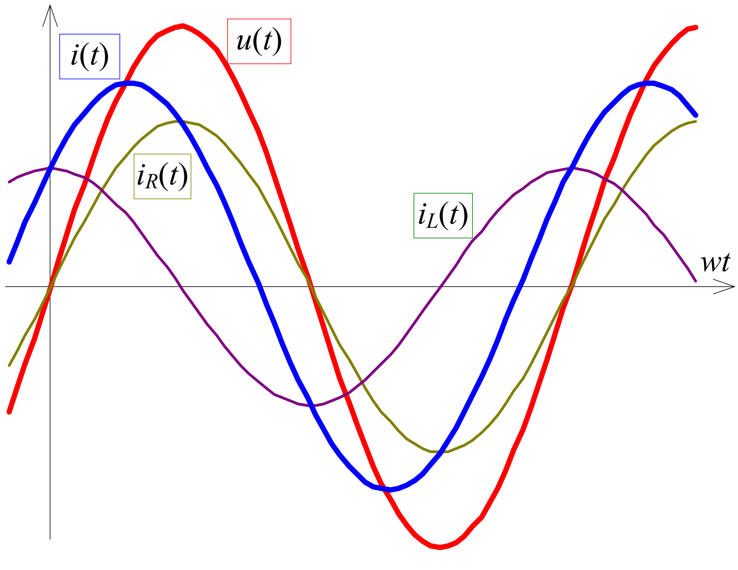


Váltakozó feszültségforrásra kapcsolt párhuzamos R-C kör vázlata

Ha a tápfeszültség szinusz függvény szerint változik, $u(t)=U_m sin\omega t$, $\varphi_u=0$, akkor az előző egyenletből:

$$i(t) = \frac{U_m}{R} sin\,\omega\, t + U_m C\omega\, cos\,\omega\, t = U_m\left(G\, sin\,\omega\, t + B_C\, cos\,\omega\, t\right) =$$

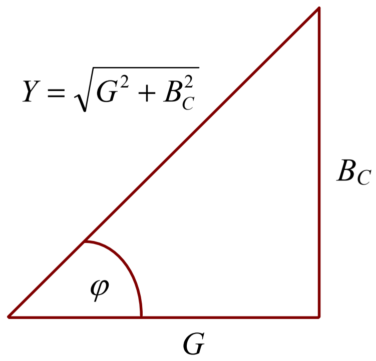
$$= U_m Y\, sin(\omega\, t + \varphi) = I_m\, sin(\omega\, t + \varphi).$$



Párhuzamos R-C kör feszültségének és áramainak időfüggvénye

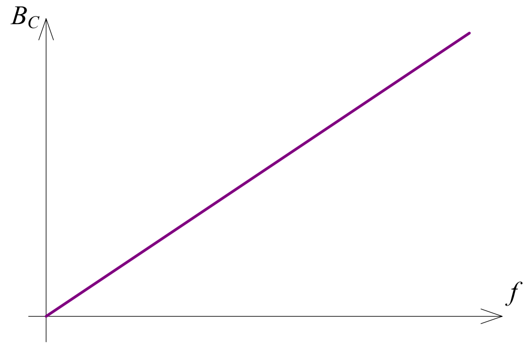
Itt $\varphi=\varphi_i$ - a fázisszög, az eredő áram fázishelyzete a feszültséghez képest, $B_C=\omega C$ - a kapacitív szuszceptancia.

$\varphi = arctg\dfrac{B_C}{G} = arctg\dfrac{\omega\, C}{\frac{1}{R}} = arctg R\omega C$, a párhuzamos *R-C* kör fázisszöge pozitív, az eredő áram φ szöggel siet a feszültséghez képest.



A G konduktivitás, a B_C szuszceptancia és az Y admittancia összefüggésének illusztrálása

A kapacitív szuszceptancia arányos a frekvenciával és a kapacitással.

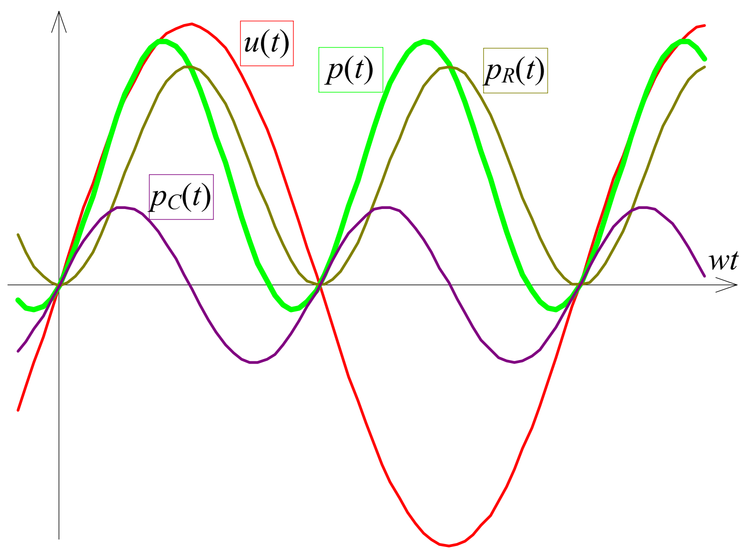


A kapacitív szuszceptancia frekvencia-függése

A teljesítmény pillanatértéke:

$$p(t)=u(t)\cdot i(t)=U_m(G\,sin\,\omega\,t+B_C\,cos\,\omega\,t)U_m\,sin\,\omega\,t=$$

$$=U_m^2G\,sin^2\,\omega\,t+U_m^2B_C\,cos\,\omega\,t\cdot sin\,\omega\,t=U_m^2G\frac{1-cos\,2\omega\,t}{2}+U_m^2B_C\frac{sin\,2\omega\,t}{2}$$, részletezve:



Párhuzamos R-C kör feszültségének és teljesítményeinek időfüggvénye

az ellenállás teljesítménye: $p_R(t)=U_m^2G\dfrac{1-cos\,2\omega\,t}{2}$, az induktivitás teljesítménye: $p_C(t) = U_m^2 B_C \dfrac{\sin 2\omega t}{2}$.

A teljesítmény középértékének különböző alakjai:

$$P = \frac{U_m^2 G}{2} = \frac{U_{eff}}{R} = \frac{U}{R} = UI\cos\varphi,$$

a meddő teljesítmény:

$$Q = -\frac{U_m^2 B_C}{2} = -\frac{U_{eff}^2}{X_L} = -\frac{U^2}{X_L} = UI\sin(-\varphi).$$

9. Párhuzamos R-L-C kör

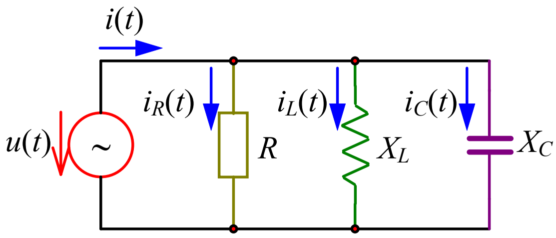
A feszültség mindhárom elemen azonos

$$u(t) = i_R(t)R = L\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{C}\int i_C(t)dt,$$

az áramok összeadódnak a csomóponti törvény szerint

$i(t)=i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)$ vagy

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L}\int u(t)dt + C\frac{du(t)}{dt}.$$

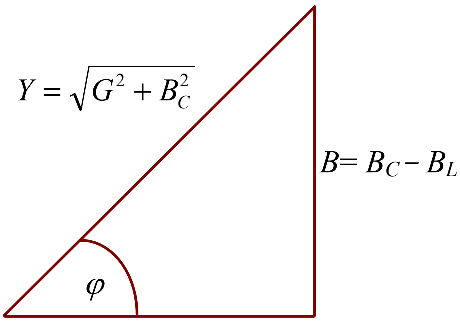


Váltakozó feszültségforrásra kapcsolt párhuzamos R-L-C kör vázlata

Ha a tápfeszültség szinusz függvény szerint változik, $u(t)=U_m \sin\omega t$, $\varphi_u=0$, akkor az előző egyenletből:

$$i(t) = \frac{U_m}{R}\sin\omega t - \frac{U_m}{\omega L}\cos\omega t + U_m C\omega\cos\omega t = \frac{U_m}{R}\sin\omega t + U_m\left(C\omega - \frac{1}{\omega L}\right)\cos\omega t =$$

$$= U_m(G\sin\omega t + B\cos\omega t) = U_m Y\sin(\omega t + \varphi) = I_m\sin(\omega t + \varphi).$$



A G konduktivitás, a B szuszceptancia és az Y admittancia összefüggésének illusztrálása

Itt φ - a fázisszög, az eredő áram fázishelyzete a feszültséghez képest,

$B = \omega C - \frac{1}{\omega L} = B_C - B_L$ - az eredő szuszceptancia.

$G\sin\omega t + B\cos\omega t = Y\sin(\omega t + \varphi)$,

$\omega t = 0$ esetén $B = Y\sin\varphi$,

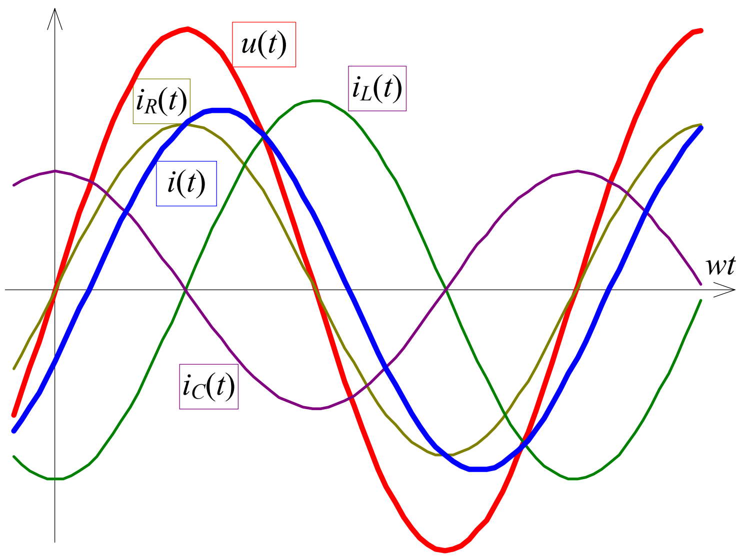
$\omega t = \pi/2$ esetén $G = Y\sin(\pi/2 + \varphi_u) = Y\cos\varphi$.

Az utóbbi két egyenlet hányadosából: $\frac{B}{G} = tg\varphi$, ebből

$$\varphi = arctg\frac{B}{G} = arctg\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = arctgR\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L},$$

a két egyenlet négyzetének összegéből: $G^2 + B^2 = Y^2$.

$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ az áramkör látszólagos vezetése, admittanciája, $[Y]$=S Siemens.



Párhuzamos R-L-C kör feszültségének és áramainak időfüggvénye

$G\sin\omega t + B\cos\omega t = Y\sin(\omega t + \varphi)$,

$\omega t = 0$ esetén $B = Y\sin\varphi$,

$\omega t = \pi/2$ esetén $G = Y\sin(\pi/2 + \varphi_u) = Y\cos\varphi$.

Az utóbbi két egyenlet hányadosából: $\frac{B}{G} = tg\varphi$, ebből

$$\varphi = arctg\frac{B}{G} = arctg\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = arctgR\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L},$$

a két egyenlet négyzetének összegéből: $G^2 + B^2 = Y^2$.

$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ az áramkör látszólagos vezetése, admittanciája.

Mivel $\varphi_u = 0$, az áram fázisszöge a feszültséghez képest

$\varphi > 0$, ha $B > 0$, azaz $\omega C > \frac{1}{\omega L}$ - az eredő áram siet a feszültséghez képest (*R-C* jellegű),

$\varphi = 0$, ha $B = 0$, azaz $\omega\, C = \dfrac{1}{\omega\, L}$ - az eredő áram fázisban van a feszültséggel (R jellegű),

$\varphi < 0$, ha $B < 0$, azaz $\omega\, C < \dfrac{1}{\omega\, L}$ - az eredő áram késik a feszültséghez képest (R-L jellegű).

A teljesítmény pillanatértéke:

$$p(t) = u(t)\cdot i(t) = U_m(G\, sin\,\omega\, t + B\, cos\,\omega\, t)U_m\, sin\,\omega\, t =$$

$$= U_m^2 G\, sin^2\,\omega\, t + U_m^2 B\, cos\,\omega\, t\cdot sin\,\omega\, t = U_m^2 G\frac{1-cos\,2\omega\, t}{2} + U_m^2 B\frac{sin\,2\omega\, t}{2}$$, részletezve:

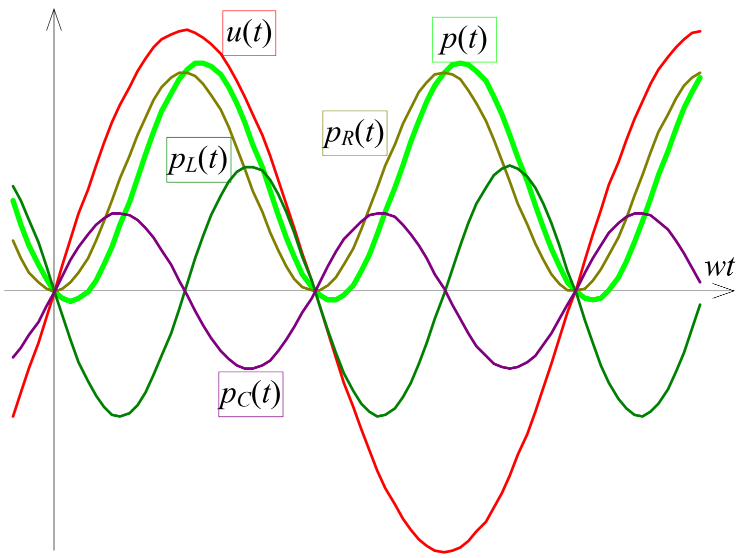
az ellenállás teljesítménye: $p_R(t) = U_m^2 G\dfrac{1-cos\,2\omega\, t}{2}$,

az induktivitás teljesítménye: $p_L(t) = -U_m^2 B_L\dfrac{sin\,2\omega\, t}{2}$,

a kapacitás teljesítménye: $p_C(t) = U_m^2 B_C\dfrac{sin\,2\omega\, t}{2}$.

A $p_R(t)$ hatásos teljesítmény minden pillanatban pozitív, középértéke $P=I^2R$.
$p_L(t)$ és $p_C(t)$ kétszeres frekvenciával leng, középértéke zérus, az eredőjük a kettő összege:

$$q(t) = p_L(t) + p_C(t) = U_m^2(B_C - B_L)\frac{sin\,2\omega\, t}{2}.$$



Párhuzamos R-L-C kör feszültségének és teljesítményeinek időfüggvénye

A teljesítmény középértékének különböző alakjai:

$$P = \frac{U_m^2 G}{2} = \frac{U_{eff}}{R} = \frac{U}{R} = UI\, cos\,\varphi,$$

a meddő teljesítmény:

$$Q = \frac{U_m^2(B_L - B_C)}{2} = UI\, sin(-\varphi).$$

Párhuzamos áramkörben párhuzamos rezonanciáról és párhuzamos rezgőkörről beszélünk.

Jelen áramkörben a rezonancia feltétele: $B_C = \omega\, C = \dfrac{1}{\omega\, L} = B_L$, vagy $X_C = X_L$.

Rezonancia esetén Y=G (mivel B_C-B_L=0), az áram és a feszültség fázisban van, a tápforrásból nincs meddő teljesítmény felvétel. Az induktivitás energiája teljes egészében átalakul kapacitív energiává és fordítva. Az induktivitáson és a kapacitáson folyó áram minden pillanatban megegyezik egymással és ellentétes előjelű, a kettő eredője zérus, így szakadásként viselkedik.
A párhuzamos rezgőkör sajátfrekvenciája és sajátkörfrekvenciája ugyanúgy számítható, mint a soros körben.